

Es 10.2.1

Dati

$$A = \begin{pmatrix} -26 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

trovare gli autovalori e una base
ortogonale che la diagonalizza

NOTA : tale base esiste per il Teorema Spettrale

Indicimento

- trovare il p.d. caratteristico

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t+26 & -1 & -5 \\ -1 & t & -3 \\ -5 & -3 & t-2 \end{pmatrix}$$

$$= t^3 + 24t^2 - 87t - 262$$

prova a cercare una radice razionale:

se esiste è un divisore di 262
prova

$$\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 131$$

risulta che -2 è una radice. Dunque

$$p_A(t) = (t+2) (t^2 + 22t - 131)$$

↑

$$\Delta = 22^2 + 131 \cdot 4$$

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = -11 - 6\sqrt{7}$$

$$\lambda_3 = -11 + 6\sqrt{7}$$

Sono 3 autovalori distinti. Come sappiamo se per ognuno di essi

scegli un autovettore, tali autovettori
 sono ortogonali fra loro
 (in questo contesto, poiché A è simmetrica,
 autovettori relativi ad autovalori distinti
 sono ortogonali fra loro)
 VEDI NOTA SOTTO

Bisogna dunque calcolare

$$\text{Ker}(-2I - A) \dots$$

$$\text{Ker}(\lambda_2 I - A)$$

$$\text{Ker}(\lambda_3 I - A)$$

Per esempio calcoliamo il primo: $\text{Ker}(-2I - A) =$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} 24 & -1 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \\ -5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

la matrice ha rango 2 come sappiamo
Risolviamo il sistema e troviamo $(m.g.(-2)=1)$.

le soluzioni sono la retta

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

dunque come primo vettore della
base posso prendere $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$

e così via troviamo

$$v_2 = \begin{pmatrix} -82 & -33\sqrt{7} \\ 11 & -3\sqrt{7} \\ 29 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} -82 + 33\sqrt{7} \\ 11 + 3\sqrt{7} \\ 29 \end{pmatrix}$$

NOTA. Sia T t.c. $T = T^*$

Siano λ e μ autovalori distinti

$$\text{Sia } v \text{ t.c. } Tv = \lambda v$$

$$w \text{ t.c. } Tw = \mu w$$

$$\langle Tv | w \rangle = \langle v | T^* w \rangle$$

$\parallel$

$$\langle \lambda v | w \rangle$$

$\parallel$

$$\lambda \langle v | w \rangle$$

$\parallel$

$$\langle v | \mu w \rangle$$

$\parallel$

$$\mu \langle v | w \rangle$$

Dunque $\lambda \langle v | w \rangle = \mu \langle v | w \rangle$

$$(1 - \mu) \langle v | w \rangle = 0$$

$$\uparrow$$

$$\bar{e} \neq 0$$

deve allora valere

$$\langle v | w \rangle = 0$$

Esercizio 10.2.2 b)

Si ha $A = \begin{pmatrix} \underline{3} & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

determinare i segni degli autovalori di A .

Ludgmento (si applica Teorema 10.2.5)

Range $d_0 = 1$
Calcolo $d_1 = \det(3)$

Calcolo $d_2 = \det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -1$

Calcolo $d_3 = \det A = -9 - 20 - 20$
 $-4 - 75 + 12 < 0$

Allora

segno $\frac{d_1}{d_0} \tilde{e} +$

segno di $\frac{d_2}{d_1} \tilde{e} -$

segno di $\frac{d_3}{d_2} \tilde{e} +$

I segni degli autovalori sono dunque
 $++-$

6 esercizi (non nel libro)

TEMA DELL'ESERCIZIO:
STUDIAMO UNA APPLIC.
LINEARE CHE NON È
AUTOGGIUNTA

Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio dei polinomi di grado al più 2. Sia $D: V \rightarrow V$ la derivata.

Consideriamo in V il prod. scalare.

$$\langle p(x) | q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx$$

a) trovare la matrice A che rappresenta il prodotto rispetto alla base $1, x, x^2$

b) trovare la matrice D in base $\{1, x, x^2\}$

c) trovare (in base $\{1, x, x^2\}$) la matrice di D^* , dove D^* è l'applicazione lineare

tale che $\langle D p(x), q(x) \rangle = \langle p(x), D^* q(x) \rangle$
 Svolgimento $\forall p(x), q(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} \langle 1|1 \rangle & \langle 1|x \rangle & \langle 1|x^2 \rangle \\ \langle x|1 \rangle & \langle x|x \rangle & \langle x|x^2 \rangle \\ \langle x^2|1 \rangle & \langle x^2|x \rangle & \langle x^2|x^2 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\langle 1|1 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dx = 2$$

$$\langle x|1 \rangle = \int_{-1}^1 x \, dx = 0$$

$$\langle x^2|1 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

$$\langle x|x \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot x \, dx = \frac{2}{3}$$

$$\langle x^2|x \rangle = \int_{-1}^1 x^3 \, dx = 0$$

$$\langle x^2 | x^2 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \cdot x^2 dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{5}$$

Dunque

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{\frac{2}{3}} & 2 & 0 \\ 0 & \cancel{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & \cancel{\frac{2}{3}} \\ \cancel{\frac{2}{3}} & 0 & \cancel{\frac{2}{3}} & \cancel{\frac{2}{3}} & 0 \\ 2 & 0 & \cancel{\frac{2}{3}} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ 0 & \cancel{\frac{2}{3}} & 0 & \cancel{0} & \cancel{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

DOMANDA EXTRA

i segni degli autovalori?

$$d_0 = 1$$

$$d_1 = 2$$

$$d_2 = \frac{4}{3}$$

$$d_3 = \frac{8}{15} + 0 + 0 - \frac{8}{27} > 0$$

La A ha dunque 3 autovalori positivi

(me lo aspettavo perché il prodotto scalare era evidentemente del positivo: infatti

$$\langle p(x) | p(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x)^2 dx \geq 0$$

ed è = 0 se e solo se $p(x) = 0$.

b)

$$[D]_{\substack{1, x, x^2 \\ 1, x, x^2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Dx^2 = 2x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\uparrow \quad \uparrow$

$D1 = 0 \quad \underline{Dx = 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Tra D^* l'aggiunto
 spieghiamo cosa fa l'aggiunto di un operatore T .
 È l'operatore T^* tale che $\langle Tv | w \rangle_A = \langle v | T^*w \rangle_A$
 (per prodotti scalari)

dei punti
coste sempre)

in termini di matrici

$${}^t W A [T] v$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow {}^t ([T^*] W) A v = \\ &= {}^t W {}^t [T^*] A v \end{aligned}$$

deve dunque valere

$${}^t [T^*] A = A [T]$$

Nel nostro caso

$${}^t [D^*] A = A [D]$$

traspongo entrambi i membri

$${}^t A [D^*] = {}^t [D] {}^t A$$

dato che
A è simmetrica tras

$$A [D^*] = {}^t [D] A$$

dato che
A è invertibile. posso scrivere.

$$[D^*] = A^{-1} {}^t [D] A$$

Calcolo

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & 0 & -\frac{15}{8} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{15}{8} & 0 & \frac{45}{8} \end{pmatrix}$$

Risultato

$$[D^*] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{15}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

PARAGRAFO 10.2.1
Ripetiamo l'enunciato.

Prop 10.2.6.

Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$

Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funzione con
tutte le derivate parziali continue fino al secondo
ordine.

Sia $\bar{x} \in \Omega$. Vale che.

- se $\bar{x}$ è un punto di minimo locale
1^a f allora $\text{grad}_{\bar{x}}(f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

e $H_{\bar{x}}(f)$ ha autovalori NON NEGATIVI

- se $\text{grad}_{\bar{x}}(f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

e $H_{\bar{x}}(f)$ ha autovalori > 0
allora $\bar{x}$ è un punto di minimo locale.

Dim. Tutto segue da.
Taylor seconda ordine.

$$f(\bar{x} + v) = f(\bar{x}) + \langle \text{grad}_{\bar{x}}(f) | v \rangle_{\mathbb{R}^n} + \\ + \frac{1}{2} \langle v | v \rangle_{H_{\bar{x}}(f)} + o(\|v\|^2)$$

se $\bar{x}$ è di min. segue già che

$$\text{grad}_{\bar{x}}(f) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Usando il teo spettroale di Hermitte.

$$H_{\bar{x}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

se uno dei λ_i fosse < 0

$$v = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{la prima riga.}$$

analogamente.

Analogamente all'altro punto.

Esercizio 10.2.3 a)

Dia $f(x, y) = \cos(xy) + \sin(x^2 - y^2) - 3xy$

Stabilire se 0 sia un punto
di massimo o di minimo.

Indagando.

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} -\sin(xy)y + \cos(x^2 - y^2)2x - 3y \\ -\sin(xy)x + \cos(x^2 - y^2)(-2y) - 3x \end{pmatrix}$$

Nota che $\text{grad}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$H f =$$

$$-\cos(xy)y^2 - \sin(x^2-y^2)4x^2 + 2\cos(x^2-y^2)$$

$$-\cos(xy)xy - \sin xy - \sin(x^2-y^2)(-4xy) - 3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos(xy)x^2 - \sin(x^2-y^2)(4y^2) + \cos(x^2-y^2)(-2)$$

Derivatives in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$Hf\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \underbrace{2} & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

gli autovalori hanno segno

$$d_0 = 1$$

$$d_1 = 2$$

$$d_2 = -13$$

$$\text{segno } \frac{d_1}{d_0} \bar{e} +$$

$$\text{segno di } \frac{d_2}{d_1} \bar{e} -$$

Allora per la Prop 10.2.6

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è punto né di min né

di massimo relativo.

PARAGRAFO 10.2.2.

Versione complessa del Teorema Gelfand

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$

Dico che A è normale se

$$A^* A = A A^*$$

Ricordo che la matrice $A^* = \overline{A^t}$

Teorema Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$

Allora A è normale se e solo se
si diagonalizza tramite una matrice
unitaria.

RICORDO CHE
[Una matrice unitaria è una matrice

$$U \text{ t.c. } U^* = U^{-1}]$$

Dim

Bisogna dim. che.

A normale $\Leftrightarrow \exists U$ con $U^* = U^{-1}$
tale che $U^{-1} A U$ è
diagonale.

l'implicazione $\Leftarrow$ è facile.

perché data U con $U^* = U^{-1}$ e

$$U^{-1} A U = D \text{ diagonale.}$$

$$\text{noto che } A = U D U^{-1}$$

Dunque

$$A^* A = (U D U^{-1})^* (U D U^{-1}) =$$

$$= \underbrace{(U^{-1})^*}_{\uparrow} D^* \cancel{U^*} \cancel{U} D \underbrace{U^{-1}}_{\uparrow} = U \bar{D} D U^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{! } (U^{-1})^* = (U^*)^* = U & \text{! } D^* = \bar{D} \\
 A A^* &= (U D U^{-1}) (U D U^{-1})^* = \\
 &= U D \cancel{U^{-1}} (\cancel{U^{-1}})^* D^* U^* = \\
 &= U D \bar{D} U^{-1}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Li sceglie una base ortogonale $v_1, \dots, v_n$
 in cui v_1 sia autovettore per A

$$A v_1 = \lambda_1 v_1$$

Formando la matrice

$$U_1 = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$| \quad z_1$$

$$U_1^{-1} A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \overbrace{\alpha \alpha \alpha \alpha \alpha} \\ 0 & \boxed{A_1} \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Il fatto che A è normale e che $U_1^* = U_1^{-1}$

$$\underbrace{U_1^{-1} A U_1}_{\text{è normale}}$$

Allora deve essere.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & z_1 \\ \hline 0 & A_1 \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 00000 \\ \hline \bar{z}_1 & \overline{A_1} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 00000 \\ \hline \overline{z_1} & \overline{A_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & z_1 \\ \hline 0 & A_1 \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

si trova che $z_1 = (00000)$

e che A_1 deve essere nullo.

È il procedimento per analisi.

