Geometria 25/3/2020

Teorema (spettrale): $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

${}^tA = A \iff A$ si diagonalizza tramite una matrice ortogonale

cioè $\exists M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ t.c. ${}^tM = M^{-1}$ e $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

cioè $\exists$ base ortonormale $v_1, \dots, v_n$ di $\mathbb{R}^n$ t.c. $A \cdot v_i = \lambda_i \cdot v_i$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$p_A(t) = t^2 - tr(A)\cdot t + \det(A)$$
$$= t^2 - 4t - 14$$
$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+14} = 2 \pm 3\sqrt{2}$$

v_1: $\begin{cases} 5x + 3y = (2+3\sqrt{2})x \\ 3x - y = (2+3\sqrt{2})y \end{cases}$ $\begin{cases} (3-3\sqrt{2})x + 3y = 0 \\ 3x + (-3-3\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (1-\sqrt{2})x + y = 0 \\ x - (1+\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$ $v_1 = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$

$(1-\sqrt{2})\cdot \mathrm{II} = (1-\sqrt{2})x - (1-2)y = 0 = \mathrm{I}$

v_2: $5x + 3y = (2-3\sqrt{2})x$ $\quad (1+\sqrt{2})x + y = 0$ $\quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\quad -1 + (2-1) = 0$

v_1, v_2 base ortonormale che diag. A.

Teo: $^tA = A \iff \exists M$ t.c. $^tM = M^{-1}$ e $^tM \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Dim: $\Leftarrow$: proviamo che se X è matrice, M ortogonale e $^tM \cdot X \cdot M$ è simm. allora X è simm. Infatti

$$^tM \cdot X \cdot M = S \Rightarrow X = M \cdot S \cdot {}^tM$$

$$\Rightarrow {}^tX = M \cdot {}^tS \cdot {}^tM = M \cdot S \cdot {}^tM \Rightarrow \underline{ok}$$

$\Rightarrow$: per induzione su n. $n = 1$ ✓

passo induttivo ; $n \geq 2$ A simm.

Passo 1: affermo che A ha un autoval. reale λ_1.

$p_A(t) \in \mathbb{R}[t] \subset \mathbb{C}[t] \Rightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{C}$ autoval. di $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$\Rightarrow \exists v_1 \in \mathbb{C}^n$ t.c. $\overset{v_1 \neq 0}{\checkmark}$ $Av_1 = \lambda_1 v_1$; calcoliamo

$$\langle v_1 | A v_1 \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle v_1 | \lambda_1 v_1 \rangle_{\mathbb{C}^n} = \overline{\lambda_1} \cdot \cancel{\|v_1\|^2_{\mathbb{C}^n}}$$

$$\|$$

$$\langle A^* v_1 | v_1 \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle {}^t\bar{A} \cdot v_1 | v_1 \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle A v_1 | v_1 \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle \lambda_1 v_1 | v_1 \rangle_{\mathbb{C}^n} = \lambda_1 \cdot \cancel{\|v_1\|^2_{\mathbb{C}^n}}$$

$\Rightarrow \lambda_1 \in \mathbb{R}$

Passo 2: conclusione.

Prendo $v_1 \in \mathbb{R}^n$ autovett. risp. a λ_1 e unitario.

Ora completo v_1 a base $(v_1, \dots, v_n) = N$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \quad {}^tN \cdot A \cdot N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^t w_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \qquad w_1 \in \mathbb{R}^{n-1} \quad A_1 \in M_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$\Rightarrow \quad N \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^t w_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \cdot {}^tN = A \text{ simm.} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & {}^t w_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \text{ simm}$$

$$\Rightarrow w_1 = 0, \quad {}^tA_1 = A_1$$

$$\Rightarrow \quad {}^tN \cdot A \cdot N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \qquad A_1 \text{ simm.}$$

Per ip. ind. $\exists\, N_1 \in M_{(n-1)\times(n-1)}$ ortog. t.c. ${}^tN_1 \cdot A_1 \cdot N_1 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underbrace{\left({}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix} \cdot {}^tN \right)}_{{}^tM} \cdot A \cdot \underbrace{\left(N \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix} \right)}_{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

Dimostrazione alternativa del fatto che A simm ha autoval. reali:

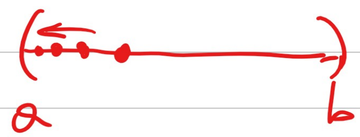
Fatto: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\Longrightarrow$ f ha max/min

chiuso e limitato

Fatto: stesso in $\mathbb{R}^n$ $\quad f : \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{X}} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua $\Longrightarrow$ f max/min

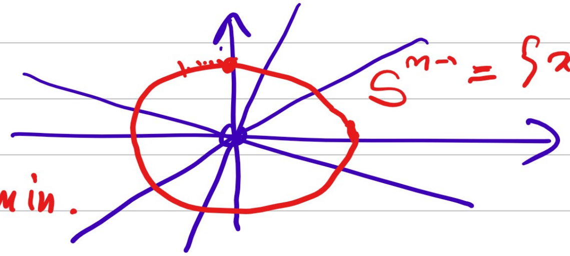
chiuso : contiene tutti i suoi pti limite

limitato : non va all'∞



Sia A simm. Considero $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{\langle x | x \rangle_A}{\|x\|^2}$

Oss: se $\lambda \neq 0$ ho $f(\lambda x) = f(x)$ $\Longrightarrow$ f è costante su tutte le rette passanti per 0 (tolto 0):



I valori assunti da f sono quelli assunti su S^{n-1} che è chiuso/lim $\Longrightarrow$ f ha max/min.

Affermo che se λ è max o min di f assunto nel pto $x \neq 0$ allora λ è autoval di A con autovettore x:

$$f(x) = \frac{\langle x|x\rangle_A}{\|x\|^2} = \frac{{}^t x \cdot A \cdot x}{{}^t x \cdot x} = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Sappiamo che $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \quad \forall k$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot (\delta_{ik} \cdot x_j + x_i \delta_{jk}) \cdot \|x\|^2 - \langle x|x\rangle_A \cdot 2x_k)}{\|x\|^4}$$

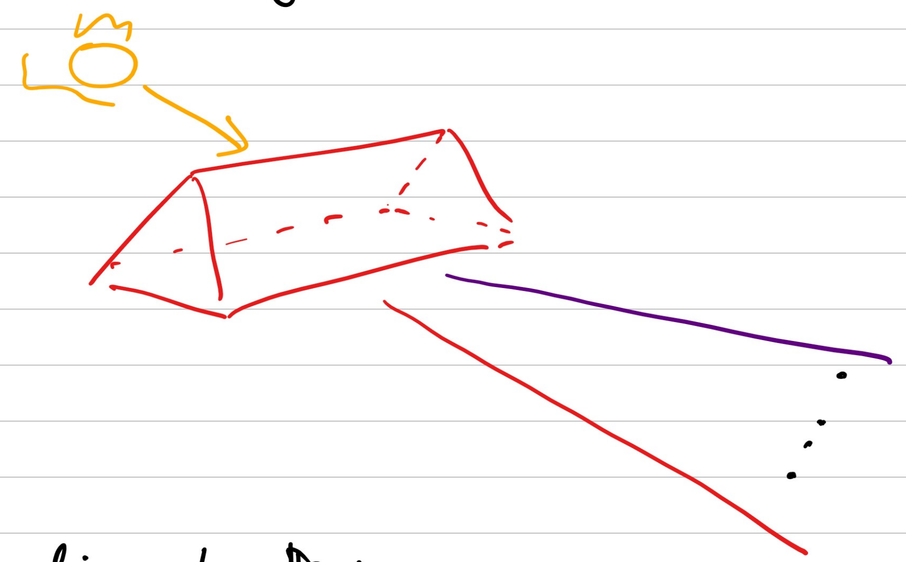
$$= \frac{1}{\|x\|^2} \cdot \Bigg(\underbrace{\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^{n} \underset{\underset{a_{ki}}{\|}}{a_{ik}} x_i \right)}_{2 \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j}}_{2(A \cdot x)_k} - \underbrace{\frac{\langle x|x\rangle_A}{\|x\|^2}}_{\substack{\| \\ f(x) \\ \| \\ \lambda}} \cdot 2 x_k \Bigg)$$

nullo $\Rightarrow (A \cdot x)_k = \lambda \cdot x_k \quad \forall k$

$\Rightarrow A \cdot x = \lambda \cdot x$. ▨

Teo (spettrale): A simm $\Longrightarrow$ si diagonalizza tramite matrice ortogonale.

"spettro"



Fatto: spettro individua gli autovettori di un "operatore d'onda" rispetto agli autoval lunghezze d'onda

---

Visto: - tutte le bilineari su $\mathbb{R}^n$ sono quelle del tipo $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$

- quelle simm. sono quelle con A simm.

Non visto: quali def. pos.? $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : \text{def pos} \iff a>0,\ ac-b^2>0 \right)$

Prop: $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ con A simm è def. pos. $\Longleftrightarrow$ tutti gli autoval. di A sono >0.

Dimo: So che $\exists M$ t.c. ${}^tM = M^{-1}$ e ${}^tM \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

def pos

$\Longleftrightarrow \langle x | x \rangle_A > 0 \quad \forall x \neq 0 \qquad [x = M \cdot y]$

$\Longleftrightarrow \langle M \cdot y | M \cdot y \rangle_A > 0 \quad \forall y \neq 0 \quad \Longleftrightarrow {}^t(M \cdot y) \cdot A \cdot (M \cdot y) > 0 \quad \forall y \neq 0$

$\Longleftrightarrow {}^ty \cdot ({}^tM \cdot A \cdot M) \cdot y > 0 \quad \forall y \neq 0$

$\Longleftrightarrow \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 > 0 \quad \forall y \neq 0$

$\Longleftrightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ $\blacksquare$

Es: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad \lambda_1, \lambda_2 \qquad \begin{matrix} \lambda_1 + \lambda_2 = a + c \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = ac - b^2 \end{matrix}$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} a + c > 0 \\ ac - b^2 > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ ac - b^2 > 0 \end{cases}$

Es: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 12 & 4 \\ -5 & 4 & 27 \end{pmatrix}$ calcolare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ difficile ...

Teo: data $A \in M_{n\times n}$ simm pongo A_k = sottomatrice prime k righe e col

$d_k = \det(A_k)$, $d_0 = 1$; se $d_1, \dots, d_{n-1} \neq 0$ allora i segni degli autovalori di A sono i segni di $\frac{d_1}{d_0}, \frac{d_2}{d_1}, \frac{d_3}{d_2}, \dots, \frac{d_n}{d_{n-1}}$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

$d_1 = 1 > 0$

$d_2 = -22 < 0$

$d_3 = 21 - 10 - 10 - 12 - 25 \cdot 7 - 1 < 0$

$\frac{d_1}{d_0} = +$ $\quad \frac{d_2}{d_1} = -$ $\quad \frac{d_3}{d_2} = +$ $\Rightarrow$ A ha 2 autoval. pos. e uno neg.

Cor: $A \in M_{n\times n}$ simm; $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos $\Leftrightarrow$ $d_1, d_2, \dots, d_n > 0$.

Dimo (Teo): per induzione su k dimostro che i segni degli autoval di A_k sono i segni di $d_1/d_0, d_2/d_1, \dots, d_k/d_{k-1}$.

$k = 1$ $\quad A_1 = (d_1)$ $\quad$ ok

Passo induttivo - Supponiamo che A_k abbia q autoval neg. e $k-q$ pos.
$\Rightarrow$ segni di $\frac{d_1}{d_0}, \dots, \frac{d_k}{d_{k-1}}$ sono q neg e $k-q$ pos.

Poiché $k+1$ potrebbe essere n ho questi casi:

(1) q pari

(2) q dispari

(A) $d_{k+1} > 0$

(B) $d_{k+1} < 0$

(C) $d_{k+1} = 0$

(6 casi in tutto)

Si trattano tutti e 6 in modo simile.

(1)-(A) : q pari $\Rightarrow d_k > 0$; $d_{k+1} \Rightarrow \frac{d_{k+1}}{d_k} > 0$

devo vedere che A_{k+1} ha q autoval. neg. e $k+1-q$ pos.

Poiche $d_{k+1} > 0$ è il podotto degli autoval di A_{k+1} il numero di quelli neg. è pari $\Rightarrow$

A_{k+1} può avere $\dots q-2, q, q+2, \dots$ autoval. neg.

"sapendo dal det. il segno del prod. degli autoval, il numero di quelli neg. se non è quello giusto sbaglio almeno di 2"

* A_{k+1} ha $\geq q+2$ autoval. neg.

Pongo $X \subset \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{k+1}$ $\quad X = \underset{\lambda>0}{+} V_\lambda(A_k)$; $\dim(X) = \boxed{k-q}$

$Y \subset \mathbb{R}^{k+1}$ $\quad Y = \underset{\lambda<0}{+} V_\lambda(A_{k+1})$; $\dim(Y) \geq \boxed{q+2}$

$\Rightarrow \langle x|x\rangle_A > 0 \ \forall x \in X \setminus \{0\}$, $\langle y|y\rangle_A < 0 \ \forall y \in Y \setminus \{0\}$

Grassmann + dim. evidenziale $(k-q)+(q+2) = k+2 > k+1$

$\Rightarrow X \cap Y \neq \{0\}$ ASSURDO

* A_{k+1} ha $\leq q-2$ autoval. neg.

Pongo $X \subset \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{k+1}$ $\quad X = \underset{\lambda<0}{+} V_\lambda(A_k)$ $\quad \dim(X) = \boxed{q}$

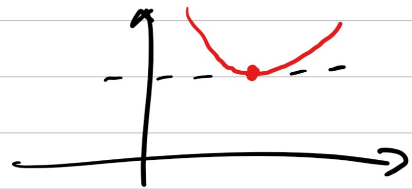
$Y \subset \mathbb{R}^{k+1}$ $\quad Y = \underset{\lambda>0}{+} V_\lambda(A_{k+1})$ $\quad \dim(Y) \geq k+1-(q-2) = \boxed{k-q+3}$

$\langle x|x\rangle_A < 0 \ \forall x \in X \setminus \{0\}$ $\quad \langle y|y\rangle_A > 0 \ \forall y \in Y \setminus \{0\}$

Grassmann $\Rightarrow$ $X \cap Y \neq \{0\}$ ASSURDO

Nei casi (C) certamente A_m ha un autoval 0 e l'argomento usa $Y = \underset{\lambda \leq 0}{+} V_\lambda(A_m)$ $\quad \langle y|y\rangle_A \leq 0 \ \forall y$ ...

In una variabile: $f:(a.b)\to\mathbb{R}$



- x min. loc. $\Rightarrow f'(x)=0$, $f''(x)\geq 0$
- $f'(x)=0$, $f''(x)>0 \Rightarrow x$ min. loc.

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ aperto, $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $Hf(x)$ è simm. $\Rightarrow$ diago via ortog

$\Rightarrow$ $\exists$ cambio di coordinate isometrico t.c.

$$f(x+h)= \underbrace{f(x)}_{} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\cdot h_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\cdot h_n}_{} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\lambda_1\cdot h_1^2+\dots+\lambda_n\cdot h_n^2\right)}_{} + o(\|h\|^2)$$

<u>Cor</u>:
- x min. loc. $\Rightarrow$ grad$(f)(x)=0$ e $(Hf)(x)$ ha tutti autoval ≥ 0
- grad$(f)(x)=0$ e $(Hf)(x)$ ha tutti autoval >0 $\Rightarrow$ x min. loc.

<u>Oss</u>: non serve calcolare direttamente gli autoval: bastano i d_k

Versione complesse del teo spettrale

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$; $A^* = {}^t\bar{A}$.

Def: data $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ dico che è normale se $A^* \cdot A = A \cdot A^*$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ 3i & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \begin{pmatrix} 1+i & -3i \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 1+i & -3i \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ 3i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

non normale

$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ 3i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & -3i \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

Es: sono normali: (MA NON SOLO)

- reali simmetriche $\quad A^* A = {}^tA \cdot A = A^2$; $A \cdot A^* = A \cdot {}^tA = A^2$
- reali antisimmetriche $\quad A^* \cdot A = {}^tA \cdot A = -A^2$; $A \cdot A^* = A \cdot {}^tA = -A^2$
- reali ortogonali $\quad A^* \cdot A = {}^tA \cdot A = I_n$; $A \cdot A^* = A \cdot {}^tA = I_n$
- complesse hermitiane $\quad A^* = A$
- complesse antihermitiane $\quad A^* = -A$
- complesse unitarie $\quad A^* = A^{-1}$ (colonne = base ortonormale $\mathbb{C}^n$)