

Esercizio 9.5.1

a) Sia $\mathbb{C}^2$ con il prodotto hermitiano standard. Trovare i vettori $v \in \mathbb{C}^2$ tali che.

- ① v unitario
- ② la seconda componente è immaginaria pura
- ③ v è ortogonale a $\begin{pmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{pmatrix}$

Cerco un vettore del tipo

$$a \begin{pmatrix} z \\ i \end{pmatrix} \text{ con } a \in \mathbb{R}$$

Voglio che

$$\left\langle a \begin{pmatrix} z \\ i \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

è il prod. hermitiano standard.

$$\left\langle a \begin{pmatrix} z \\ i \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} z-i \\ 1+3i \end{pmatrix} \right\rangle = a \left(\underbrace{(z+i)}_{z-i} z + \underbrace{(1-3i)i}_{1+3i} \right)$$

Voglio che sia ≥ 0 per ogni a

Dunque deve valere

$$(z+i)z + (1-3i)i = 0$$

$$z^2 + iz + i + 3 = 0$$

$$(z+i)z = -3-i$$

$$z = \frac{-3-i}{z+i} \cdot \frac{(z-i)}{(z-i)}$$

$$z = \frac{-6 + 3i - 2i - 1}{5}$$

$$z = \frac{-7+i}{5}$$

$$v = a \begin{pmatrix} \frac{-7+i}{5} \\ i \end{pmatrix} = \frac{a}{5} \begin{pmatrix} -7+i \\ 5i \end{pmatrix}$$

l'ultima richiesta riguarda la norma di v .

$$\|v\|^2 = \frac{a^2}{25} (50 + 25) =$$

$$= 3a^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{3}$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

In conclusione.

$$v = \pm \frac{1}{5\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -7+i \\ 5i \end{pmatrix}$$

es 9.5.2

In $\mathbb{C}^2$ ortormalizzare la base
risp. al prod. hermitiano stand.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3-i \\ 2i \end{pmatrix} = v_2$$

Applica G-S nel caso hermitiano

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}$$

Per il secondo vettore calcola

$$v_2 - \langle v_2 | u_1 \rangle u_1$$

$$\begin{pmatrix} 3-i \\ 2i \end{pmatrix} - \frac{(1-i)(3-i) + (-2)2i}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3-i \\ 2i \end{pmatrix} - \frac{3-3i-i-1-4i}{6} \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-i \\ 2i \end{pmatrix} - \frac{2-8i}{6} \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3-i \\ 2i \end{pmatrix} - \frac{1-4i}{3} \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

Questo va normalizzato

$$U_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

NOTA: anche $U_1, -U_2$ è un insieme ortonormale
§ 9.5.3

In $\mathbb{C}^3$ calcolare la proiezione ortogonale

di $\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$ su $W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-i \end{pmatrix} \right)$

La proiezione ^{di un vettore v} ha la forma

$$v - 2 \overline{v_1 \wedge v_2}$$

$\uparrow$
 $\in \mathbb{C}$ $\uparrow$ genera la retta $W^\perp$

Calcolo $\underline{v_1 \wedge v_2} = \begin{pmatrix} -1-i \\ -1-i \\ i \end{pmatrix}'$

- Dunque la proiezione su W di $\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$ è

$$\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{(2+i)(1+i)+i}{5} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1-i \\ i \end{pmatrix}$$

Infatti la regola che conosciamo è

$$\underline{v} = \frac{\langle \underline{v} \mid \underline{u} \rangle}{\|\underline{u}\|^2} \underline{u}$$

questo vettore è ortogonale a U .

$$\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1-i \\ 1-i \\ i \end{pmatrix} \right\rangle}{5} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1-i \\ i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5-3i \\ 2i-5 \\ -1-i \end{pmatrix}$$

COMMENTO

Torno su $\overline{v_1 \wedge v_2}$

Lia

$$v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

allora

$$(2, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$$

Nel prodotto hermitiano ^{standard} ~~osservo~~ che

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \overline{(\bar{2}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (2, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$$

Perunque $\overline{v_1 \wedge v_2}$ è ortogonale a
 v_1 e v_2 risp. al prod hermitiano

standard.

9.5.4 e) Sia $V = \mathbb{C}^3$

Sia $W = \{ z \in \mathbb{C}^3 : iz_1 + (1-2i)z_2 + (3+i)z_3 = 0 \}$

Sia $\langle \cdot | \cdot \rangle$ hermitiano standard.

Descrivere la proiezione ortogonale p su W .

Osservo che $W = \ker \begin{pmatrix} -i \\ 1+2i \\ 3-i \end{pmatrix}^\perp$

Infatti:

$$iz_1 + (1-2i)z_2 + (3+i)z_3 =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -i \\ 1+2i \\ 3-i \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ora

$$P \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -i \\ 1+2i \\ 3-i \end{pmatrix}$$

con $2 = \frac{i z_1 + (1-2i) z_2 + (3+i) z_3}{\left\| \begin{pmatrix} -i \\ 1+2i \\ 3-i \end{pmatrix} \right\|^2}$

se $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in W$ questo numeratore fa 0

se $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 1+2i \\ 3-i \end{pmatrix}$ risulta $2=1$

P con colonna è lineare e cancellabile

con la proiezione su W sui
 vettori di W e su $\begin{pmatrix} -i \\ 1+2i \\ 3-i \end{pmatrix}$
 in particolare coincide su una base
 di $\mathbb{C}^3$ allora P è proprio la
 proiezione cercata.

Per averla come matrice

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 15 \\ 2-i \\ -1-3i \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2+i \\ 11 \\ -1+7i \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -1+3i \\ -1-7i \\ 6 \end{pmatrix}$$

dunque la matrice res. alla base
standard è

$$\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 15 & 2+i & -1+3i \\ 2-i & 11 & -1-7i \\ -1-3i & -1+7i & 6 \end{pmatrix}$$

RIVISITAZIONE DEL PASSAGGIO VISTO SOPRA.

Se ho $W = \text{Lan}(v_1, v_2)$

e ho $W^\perp = \text{Lan}(v_3)$

$P_W \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} - \text{proj}_{v_3}$

Dare
da $\alpha(z_1, z_2, z_3)$ ^{lineare} Voglio che

$$\alpha(v_1) = 0, \quad \alpha(v_2) = 0, \quad \alpha(v_3) = 1$$

perché

$$P_W(v_1) = v_1 - \alpha(v_1) v_3$$

↑
deve essere 0

$$P_W(v_2) = v_2 - \alpha(v_2) v_3$$

↑
deve essere 0

$$P_W(v_3) = v_3 - \alpha(v_3) v_3$$

↑
deve essere 1