OGGI ESERCIZI

Esercizio 10.1.2

Determinare gli autovalori dell'applicazione lineare f associata alle seguenti matrici (si considera fissata una base β).

c) $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = [f]^{\beta}_{\beta}$

- calcolo il pol caratteristico

$$\downarrow tI - A$$

$$P_f(t) = \det \begin{pmatrix} t+5 & -2 \\ -2 & t+3 \end{pmatrix} =$$

$$= (t+5)(t+3) - 4 = t^2 + 8t + 11$$

e gli autovalori sono

$$\Delta = 64 - 44 = 20$$

$$\lambda_1 = \frac{-8 + \sqrt{20}}{2} = -4 + \sqrt{5}$$

$$\lambda_2 = \frac{-8-\sqrt{20}}{2} = -4-\sqrt{5}$$

$$P_f(t) = (t-(-4+\sqrt{5}))(t-(-4-\sqrt{5}))$$

Per trovare una base che diagonalizza f (non richiesto dal testo) dovete calcolare gli autospazi

$$V_{-4+\sqrt{5}} = \operatorname{Ker}\left((-4+\sqrt{5})I - A\right)$$

$$V_{-4-\sqrt{5}} = \operatorname{Ker}\left((-4-\sqrt{5})I - A\right)$$

verificate che $V_{-4+\sqrt{5}}$ e $V_{-4-\sqrt{5}}$ hanno dimensione 1.

Dunque $m.a(-4+\sqrt{5}) = m.g.(-4+\sqrt{5})$

$m.a(-4-\sqrt{5}) = m.g(-4-\sqrt{5})$

ricordo da Lemma 10.1.6 che $1 \leq m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda)$

Dunque la f è diagonalizzabile

e una base che la diagonalizza è
data da v_1, v_2 con

$$v_1 \in V_{-4+\sqrt{5}} \qquad (v_1 \neq 0)$$

$$v_2 \in V_{-4-\sqrt{5}} \qquad (v_2 \neq 0)$$

---

k) $f : V \to V$

$$V = \{ x \in \mathbb{R}^3 : 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0 \}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

<u>Osserviamo</u> (RIPASSO) che f è ben def
perché posto $w = (4, -3, -5)$

e porta B $\hat{f}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\hat{f}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\hat{f}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

che rappresenta

$$\hat{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

Vale che

$$\boxed{w B = -2w}$$

dunque f è ben definita.

$$v \in V \iff w v = 0$$

prodotto fra matrici

$$Bv \in V \iff w B v = 0$$

Ma $w B v = (wB) v = -2 w v$

che è $= 0$ se e solo se $v \in V$.

Come si procede?

- si sceglie una base di V

per esempio $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = v_2$

- si calcola

$f(v_1)$ scritto in termini di v_1, v_2

$$[f]^{v_1,v_2}_{v_1,v_2} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- si calcola

$$p_f(t) = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$$

Allora gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 2$

Esercizio (non del libro).

Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$[f]^{st}_{st} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 8 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Determinare gli autovalori

b) Dire se f è diagonalizzabile e se lo è indicare una base fatta di autovettori.

Risposta

a) Calcolo $p_f(t) = \det \left(tI - \begin{pmatrix} 7 & 8 & 8 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & -8 & -5 \end{pmatrix} \right)$

$$= (t-3)\det\begin{pmatrix} t-7 & -8 \\ 4 & t+5 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{(t-3)}}\,(t-3)(t+1) = (t-3)^2(t+1)$$

Gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{con} \quad m.a(3) = 2$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \text{con} \quad m.a.(-1) = 1$$

b) Calcolo le molteplicità geometriche:

$$m.g(3) = \dim V_3 = \dim \operatorname{Ker}(3I - f)$$

$$3I - [f]^{st}_{st} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}$$

ha rango 1

Dunque $\operatorname{Ker}(3I - f)$ ha dim 2

Allora $\quad m.a(3) = m.g.(3) = 2$

So già che $\quad m.a.(-1) = m.g(-1) = 1$

come sopra ricordo che vale

$$1 \leq m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda)$$

nel nostro caso $\quad m.a.(-1) = 1$

Posso concludere che f è diagonalizzabile (per il criterio della molteplicità algebrica e geometrica).

Per trovare una base che diagonalizza f calcolo anche V_{-1}

$$V_{-1} = \operatorname{Ker}\left(I - (-1) f\right) =$$

$$= \operatorname{Ker}\left(I + f\right)$$

$$I + [f]_{st}^{st} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 (lo sapevamo già anche senza guardarla perché sapevamo m.g.$(-1) = 1$)

Una base di V_{-1} è data dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1$

Una base di V_3 è data da

$$v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_3$$

Dunque $\underbrace{v_1}_{\text{rel. a } -1}, \underbrace{v_2, v_3}_{\text{rel a } 3}$ sono autovettori

e si verifica che sono lin INDIP

dunque una base.

Potete verificarlo direttamente, una volta vole che se avete due autospazi distinti V_{λ_1} e V_{λ_2}

e prendete una base $w_1, , w_K$ di V_{λ_1}
e una base $z_1, , z_s$ di V_{λ_2}
allora
$w_1, , w_K, z_1, , z_s$ sono LIN
INDIP.
Lo stesso se avete molti autospazi
$V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \quad , V_{\lambda_m}$

Nella Prop. 10.1.5 abbiamo dim che autovettori relativi ad autovalori distinti sono LIN DIP., è una premessa al risultato esposto sopra.

Es 10.1.3

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile
se e solo se ${}^tA$ è diagonalizzabile.

Infatti:

$$p_A(t) = \det\begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \qquad p_{{}^tA}(t) = \det\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$$

per esempio

$$\det\begin{pmatrix} t-3 & -4 \\ 8 & t+5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} t-3 & 8 \\ -4 & t+5 \end{pmatrix}$$

in generale vale che se B è una matrice $\det B = \det {}^tB$

Inoltre le molteplicità geometriche degli autovalori sono le stesse nei due casi. (per esempio per il teorema degli orlati ma anche perchè il rango è uguale al numero max di righe lin indip o di colonne lin indip.).
In sostanza se C è una matrice

$$\text{rango } C = \text{rango } {}^tC.$$

Esercizio 10.1.9.

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$[f]_{st}^{st} = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 92 \\ -30 & -7 & -144 \\ -3 & -1 & -11 \end{pmatrix}$$

Trovare gli autovalori e se è diagonalizzabile una base di $\mathbb{R}^3$ che la diagonalizza.

Ecco una traccia dettagliata:

$$P_f(t) = (t-1)(t+1)(t-2)$$

hanno tutti m. a. $= 1$

Allora posso dire subito che f è diagonalizzabile.

Dovete calcolare

$$\operatorname{Ker}(-1 I + [f]) = V_{-1}$$

$$\operatorname{Ker}(1 I + [f]) = V_1$$

$$\operatorname{Ker}(2 I + [f]) = V_2$$

sono 3 rette (infatti $m.g(-1) = m.g(1) = m.g(2) = 1$)

e potete scegliere

$v_1 \in V_{-1}$

$v_2 \in V_1$

$v_3 \in V_2$

e v_1, v_2, v_3 è la base cercata

$$v_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}$$