

Def Sia $T: V \rightarrow V$ applicazione lineare, Un vettore $v \in V - \{0\}$ si dice AUTO VETTORE per T se

$$T v = \lambda v \quad \text{con } \lambda \in K$$

($K = \mathbb{R}$ oppure $K = \mathbb{C}$).

In tal caso λ si dice

AUTO VALORE relativo a v .

Def Sia $T: V \rightarrow V$ app. lineare

Sia λ un autovalore di T

allora chiamo $V_\lambda = \text{Ker}(\lambda I - T)$

È l' AUTO SPAZIO relativo a λ .

Osservazione: V_λ è sottospazio rettonale.
Commento: sia $v \in V_\lambda$

allora $v \in \text{Ker}(\lambda I - T)$

$$\text{cioè } (\lambda I - T)v = 0$$

$$\lambda I v - T v = 0$$

$$\lambda v - T v = 0$$

$$T v = \lambda v$$

abbiamo dunque osservato che

$v \in V_\lambda$ se e solo se

" v è un autovettore rel. a λ oppure
 $v = 0$ "

Def 10.1.2

Un $\lambda \in K$ è autovettore di T
se e solo se

$$\dim \text{Ker}(\lambda I - T) > 0$$

Infatti se λ è autovettore allora

$$V_\lambda = \text{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$$

perché $\exists v \neq 0$ in V_λ .

Viceversa se

$$\text{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$$

come visto sopra prendo un $v \in \text{Ker}(\lambda I - T)$

$v \neq 0$, e scopro che

$$Tv = \lambda v$$

e dunque v è autovettore e
 λ è il suo autovalore.

Prop 10.1.3

Dato $T: V \rightarrow V$

si considera

$$p_T(t) = \det \left(t I_m - [T]_{\beta}^{\beta} \right)$$

una variabile
↓

dove β è una base di V .

Vale che $p_T(t)$ non dipende dalla

base scelta ed è un polinomio monico
nella variabile
il cui grado = $\dim V$.

Inoltre $\lambda \in K$ è autovalore di T

se e solo se $p_T(\lambda) = 0$.

NOTA:

Il polinomio $p_T(t)$ si chiama
"polinomio caratteristico" di T .

Esempio. Sia $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

tale che rispetto alla base standard

$$[T]_{st}^{st} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Allora

$$\begin{aligned} p_T(t) &= \det \left(t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} t-4 & -5 \\ 0 & t+7 \end{pmatrix} = (t-4)(t+7) \end{aligned}$$

Allora gli autovalori di T sono

$$\lambda_1 = 4 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -7.$$

Esempio $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ t_c

$$[T]_{st}^{st} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora

$$\begin{aligned} p_T(t) &= \det \left(t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} = \underline{\underline{t^2 + 1}} \end{aligned}$$

Allora T non ha autovalori in $\mathbb{R}$.

Dunque questa T non si potrà diagonalizzare. (non ha nessun

autonettore).

Esempio $T: \underline{\phi^2} \rightarrow \underline{\phi^2} \quad t_c$

$$\begin{bmatrix} T \\ \text{std} \phi^2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_T(t) = t^2 + 1 = (t - i)(t + i)$$

Gli autovalori sono

$$\lambda_1 = i \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -i.$$

Questa T si può diagonalizzare. $\downarrow$ $= \text{Ker}(iI - T)$

Prendendo $v_1 \neq 0 \in V_i = \text{Ker}(T - iI)$

$$0 \neq v_2 \in V_{-i} = \text{Ker}(T + iI)$$

e v_1, v_2 saranno una base $\uparrow$

costituita di autovettori

$$= \underline{\underline{\text{Ker} (-iI - T)}}$$

NOTA

Data

$$L : V \rightarrow V$$

vale

$$\text{Ker}(L) = \text{Ker}(-L)$$

Infatti

$$Lv = 0$$

se e solo se.

$$(-L)v = 0$$

Dim Prop 10.1.3

$$[T]_{\beta}^{\beta}$$

se β' è un'altra base

$$[T]_{\beta'}^{\beta'} = M^{-1} [T]_{\beta}^{\beta} M$$

demo confrontare

$$\det(tI - [T]_{\beta}^{\beta}) \stackrel{?}{=} \det(tI - [T]_{\beta'}^{\beta'})$$

Calcolo

$$\begin{aligned} \det(tI - [T]_{\beta'}^{\beta'}) &= \\ &= \det(tI - M^{-1}[T]_{\beta}^{\beta}M) \\ &= \det(M^{-1}(tI - [T]_{\beta}^{\beta})M) \\ &= \det(M^{-1}) \det(tI - [T]_{\beta}^{\beta}) \det(M) \\ &\stackrel{\text{per la BINET}}{=} \det(M^{-1}) \det(tI - [T]_{\beta}^{\beta}) \cdot \det(M) \end{aligned}$$

Lemma per BINET

$$\det(M) \det(M^{-1}) = 1$$

Infatti:

$$\det(I) = 1$$

||

$$\det(M^{-1}M)$$

|| Binet

$$\det(M^{-1}) \det(M)$$

Quindi

$$= \det \left(tI - [T]_{\beta}^{\beta} \right)$$

Il fatto che $P_T(t)$ sia polinomio

monico di grado $\dim V$ si
 può dire per inclusione.

□

Esempio Sia $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ matrice invertibile.

$$\det \begin{pmatrix} \underline{t+3} & 4 & 5 \\ 0 & \underline{t-1} & 2 \\ 4 & -3 & \underline{t-6} \end{pmatrix} =$$

1

da dove viene il termine in t^3 ?

$$\begin{array}{cccccc} \cancel{t+3} & \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{t+3} & \cancel{4} & \\ & 0 & \cancel{t-1} & \cancel{2} & 0 & \cancel{t-1} \\ & & 4 & \cancel{-3} & \cancel{t-6} & \cancel{4} & \cancel{-3} \end{array}$$

//

$(t^3)_+$

$$\begin{aligned} (\underline{t+3}) (\underline{t-1}) (\underline{t-6}) &= t^3 - 6t^2 - t^2 + 3t^2 + \dots \\ &= t^3 - (6+1-3)t^2 + \dots \end{aligned}$$

Oss I coefficienti di $p_T(t)$ più

// famosi // sono

$$p_T(t) = \underset{\uparrow}{t^m} - \underline{\text{tr}(T)} t^{m-1} + \dots + \underline{(-1)^m \det(T)}$$

Verifica su un esempio.

L'ha

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} t-3 & -4 & -6 \\ 2 & t+2 & -1 \\ 0 & 2 & t+1 \end{pmatrix} = t^3 + \dots$$

il termine costante è

$$\det \begin{pmatrix} -3 & -4 & -6 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

il termine in t^2 è -traccia

come potete verificare anche nell'esempio precedente

Il fatto che $p_T(t)$ non dipenda dalla base
implica allora che la traccia e il
determinante non dipendono dalla base

Proposizione 10.1.5. Sia $\dim V = n$,

Se $p_T(t)$ ha n radici distinte
in $\mathbb{K}$ allora T è diagonalizzabile.

Dim Per induzione su $n = \dim V$

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori
distinti.

Siano $v_1, \dots, v_n$ autovettori
ad essi associati

$$T v_1 = \lambda_1 v_1$$

$$T v_2 = \lambda_2 v_2$$

$$T v_n = \lambda_n v_n$$

Dimostro per induzione su n che
 $v_1, \dots, v_n$ è una base di V
(base dim che sono lin INDIP).
Per $n = 1$ banale

v_1 è lin INDIP.

Suppongo vero per $k < n$
cioè suppongo che $v_1, \dots, v_k$ siano
lin INDIP.

Devo dim che $v_{k+1} \notin \text{span}(v_1, \dots, v_k)$

Per assurdo

$$v_{k+1} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

entro in scena la T

$$T(v_{k+1}) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k)$$

$$\lambda_{k+1} v_{k+1} = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k$$

$$\lambda_{k+1} (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k$$

$$0 = \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) v_1 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) v_k$$

è una comb. lineare di $v_1, \dots, v_k$
che fa 0; poiché $v_1, \dots, v_k$
sono lin. INDIP allora,
i coeff devono essere = 0

Allora $\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = 0$

gli
autovalori

sono
distinti
allora

$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) \neq 0$$

$$\alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$$

Allora $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$

almeno ho

$$v_{k+1} = 0 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_k$$

ASSURDO perché $v_{k+1} \neq 0$
dato che è autovettore.

Per studiare i casi in cui il
polinomio caratteristico ha radici multiple
conviene introdurre le seguenti definizioni.

Def. Dato λ autovettore di T , se.

$P_T(t)$ si fattorizza come

$$P_T(t) = (t - \lambda)^a q(t)$$

$\uparrow$
 λ non è radice di $q(t)$

dire che a è la "moltiplicità algebrica di λ ".

Dimo che $a = m.a.(\lambda)$

Def Dato λ autovalore di T dire che la "moltiplicità geometrica di λ " è $\dim \text{Ker}(\lambda I - T)$ ossia $\dim V_\lambda$

Lemma

$$m.g.(\lambda) = \dim \text{Ker}(\lambda I - T)$$

Lemma Dato λ autovalore di T

Vale $1 \leq m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda)$.

Dim Scegli una base $\overset{v_1, \dots, v_k}{V}$ in V_λ e la completa ad una base β di V .

Allora

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \left(\begin{array}{ccc|cc} \lambda & & & & \\ & \lambda & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & \lambda & \\ & & & & \lambda \\ \hline & & & & & 0 \\ & & & & & A'' \end{array} \right)$$

$Tv_1 \downarrow$ $Tv_2 \downarrow$

$$Tv_1 = \lambda v_1$$

$$\begin{matrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$Tv_2 = \lambda v_2$$

$$\begin{matrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

quando calcoliamo $p_T(t)$ si calcola

$$p_T(t) = \det(tI - [T]_{\beta}^{\beta})$$

$$= \det \begin{pmatrix} t-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t-\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (t-\lambda)(t-\lambda) \dots (t-\lambda) \det(\widetilde{A''}) =$$

$$= (t-\lambda)^{m.g.(\lambda)} \det(\widetilde{A''})$$

$\uparrow$
 $= K$

ecco un polinomio
 $(t-\lambda)^m \dots$

Nota che $\det(\widetilde{A''})$ potrà continuare
 senza mai aumentare l'esponente di
 $(t-\lambda)$, dunque
 $m.a.(\lambda) \geq m.g.(\lambda)$

□

Teorema 10.1.7 Sia V uno sp. vett. su K

e $T: V \rightarrow V$ applic. lineare.

- Se $K = \mathbb{C}$ allora T è diagonalizzabile se e solo se per ogni radice λ di

$$P_T(t) \text{ si ha } m.g.(\lambda) = m.a.(\lambda)$$

- Se $K = \mathbb{R}$ allora T è diagonalizzabile

se e solo se ogni radice λ di $P_T(t)$ è reale e si ha $m.g.(\lambda) = m.a.(\lambda)$

Osservo che se prendo una matrice

$$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

posso pensarla come matrice

sia di una $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

sia di una $S: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$

Può accadere che S sia diagonalizzabile
e T no, come avete visto nell'esempio
a inizio lezione.

Sia ora $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$

La penso come matrice di

$$S: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$$p_S(t) = (t - \lambda_1)^{a_1} \cdots (t - \lambda_k)^{a_k}$$

perché siamo su $\mathbb{C}$. Lo anche che.

$$p_S(t) = t^n - (\operatorname{tr} S) t^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det S$$

Confrontando le due espressioni
scopro che

$$\text{tr } S = a_1 \lambda_1 + \dots + a_k \lambda_k$$

è la somma degli autovalori contati con molteplicità

$$\xrightarrow{\quad} \frac{(t - \lambda_1)^{a_1} (t - \lambda_2)^{a_2} \dots (t - \lambda_k)^{a_k}}{t^{n-1}}$$

$$\det S = \lambda_1^{a_1} \dots \lambda_k^{a_k}$$

è il prodotto degli autovalori
contati con molteplicità.