$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto $\quad f : \Omega \to \mathbb{R}^n \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad \frac{\partial f}{\partial v}(x)$

$$\mathrm{grad}(f)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot v_i = \langle \mathrm{grad}(f)(x) \mid v \rangle .$$

Oss: se x è un punto di max o min loc. per f allora $\mathrm{grad}(f)(x) = 0$.

($f : (a,b) \to \mathbb{R}$, x min loc $\Rightarrow f'(x) = 0$)

Infatti se $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \neq 0$ incrementando x_i ho che f cresce/decresce.

Prop: se $w_1, \dots, w_k$ è base ortog di $W \subset V$ allora

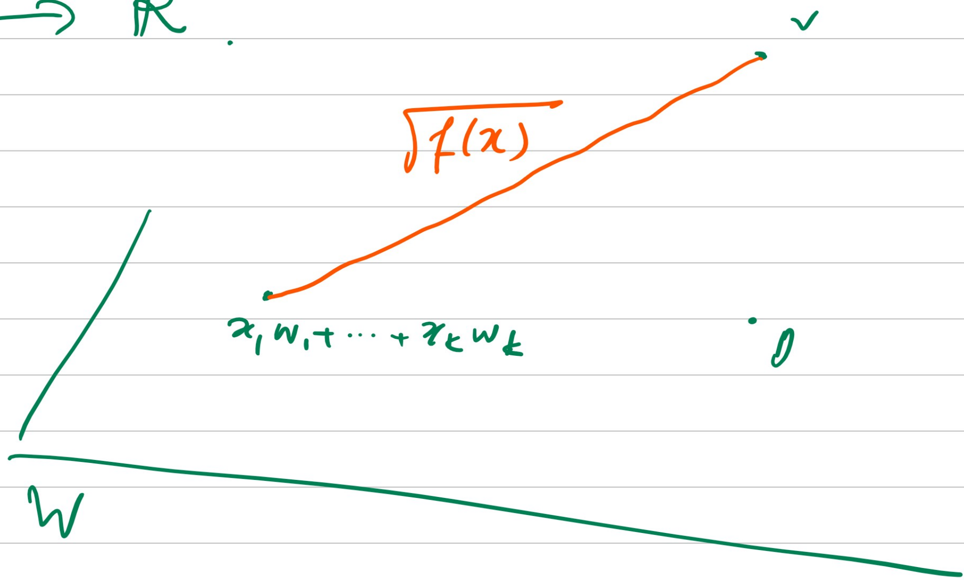
$$p_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i$$

e tale punto è il punto di W più vicino a v.

Dim:

Devo vedere che $p_W(v)$ è il $w \in W$ che rende minimo $\|v-w\|$.

Cioè che il minimo di $f(x) = \|v-(x_1w_1+\cdots+x_kw_k)\|^2$ si ha per $x_i = \dfrac{\langle v|w_i\rangle}{\|w_i\|^2}$; $f:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.



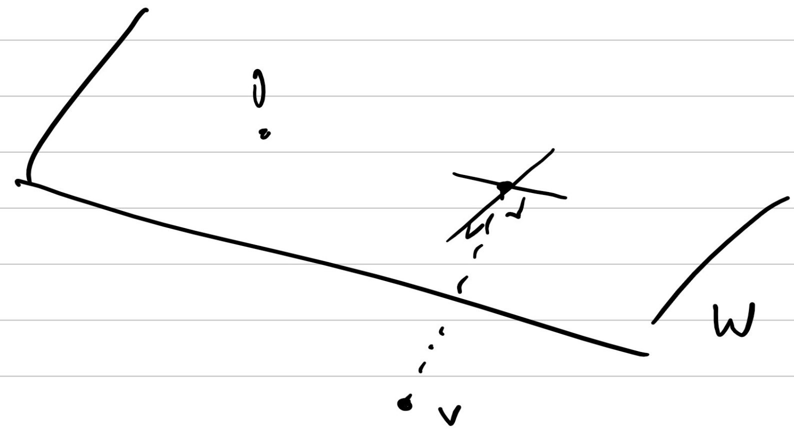
Oss: se $\|x\| \to \infty$ ho $f(x) \to \infty$.

Se mostro che c'è un solo punto in cui $\text{grad}(f)=0$ esso è il minimo.

$$f(x) = \left\| v - \sum_{i=1}^{k} x_i w_i \right\|^2 = \|v\|^2 - 2\sum_{i=1}^{k} x_i \langle v|w_i\rangle + \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot \|w_i\|^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -2\cdot\langle v|w_j\rangle + 2x_j \cdot \|w_j\|^2$$

nullo solo per $x_j = \dfrac{\langle v|w_j\rangle}{\|w_j\|^2}$.



$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

$$(Hf)(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{i,j=1\dots n}$$

f "buona" è simmetrica.

Es: $x^2y^3\sin(5x-8y) = f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3\sin(5x-8y) + x^2y^3\cdot 5\cdot\cos(5x-8y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2\sin(5x-8y) + x^2y^3\cdot(-8)\cos(5x-8y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = 6xy^2\cdot\sin(.) + 2xy^3\cdot(-8)\cdot\cos(.) + 3x^2y^2\cdot 5\cdot\cos(.) + x^2y^3\cdot 5\cdot(-8)\cdot -\sin(.)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 6xy^2\cdot\sin(\cdot) + 3x^2y^2\cdot 5\cdot\cos(.) + 2xy^3\cdot(-8)\cdot\cos(.) + x^2y^3\cdot(-8)\cdot 5\,(-\sin(\cdot))$$

——— o ———

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ Taylor II ordine:

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)\cdot t + \frac{1}{2}f''(x)\cdot t^2 + o(t^2)$$

x min loc. $\Rightarrow f'(x)=0 \quad f''(x)\geq 0$

$f'(x)=0 \quad f''(x)>0 \Rightarrow x$ min loc

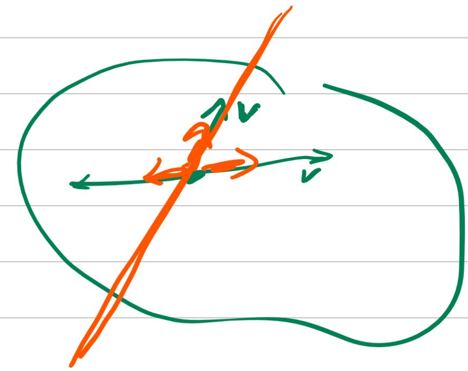
Prop. $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $x \in \Omega$

$$\Rightarrow f(x+v) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot v_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \cdot v_i v_j + o(\|v\|^2)$$

$$= f(x) + \langle \operatorname{grad}(f)(x) | v \rangle + \frac{1}{2} \langle v | v \rangle_{H(f)(x)} + o(\|v\|^2).$$

"Dimo": pongo $t = \|v\|$ $\quad u = \frac{v}{\|v\|}$ $\quad v = t \cdot u$.

$g(t) = f(x + tu) = f(x+v)$. Fingo che u sia costante



$$\Rightarrow g(t) = g(0) + g'(0) \cdot t + \frac{1}{2} g''(0) \cdot t^2 + o(t^2)$$

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f(x + tu) = \frac{d}{dt} f(x + tu_1 + \dots + tu_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + tu) \cdot u_i$$

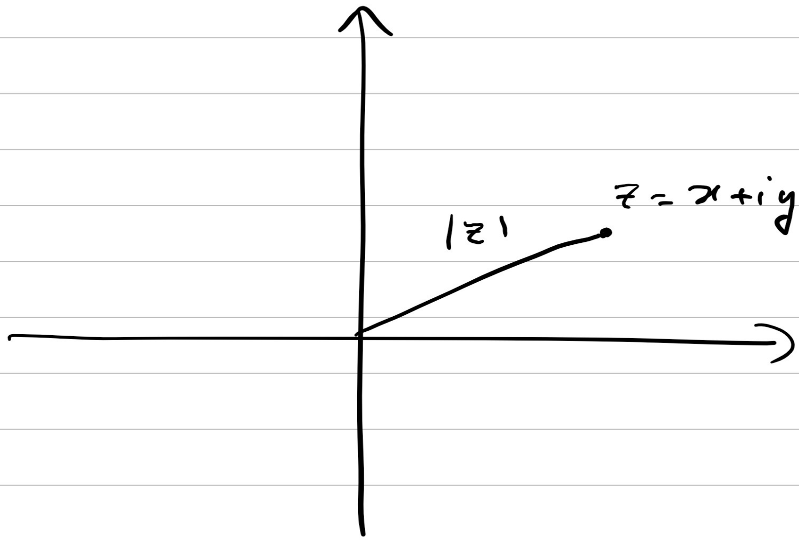
$$g''(0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \cdot u_i u_j$$

$$t \cdot g'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \underbrace{t u_i}_{v_i} \qquad t^2 g''(0) = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \underbrace{(t u_i)}_{v_i} \cdot \underbrace{(t u_j)}_{v_j}. \quad \blacksquare$$

Q: analogo in n var. di $f''(x) > 0$ o $f''(x) \geq 0$?

Caso complesso.

$$\mathbb{C} = \{ x+iy : x,y \in \mathbb{R} \} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$$



$$|z|^2 = \bar{z} \cdot z = \sqrt{x^2+y^2}$$

$\mathbb{C}^n$ lunghezza di z è $|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$

$$= \bar{z}_1 \cdot z_1 + \dots + \bar{z}_n \cdot z_n .$$

Def: prodotto scalare hermitiano standard di $\mathbb{C}^n$

$$\langle z | w \rangle = \bar{w}_1 \cdot z_1 + \dots + \bar{w}_n \cdot z_n$$

$$= (\bar{w}_1 \ \cdots \ \bar{w}_n) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = w^* \cdot z$$

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{C}) \qquad A^* = {}^t\bar{A}$

$$A = \begin{pmatrix} 2-i & 3 & 5i \\ 7+2i & -9i & 4+2i \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2+i & 7-2i \\ 3 & 9i \\ -5i & 4-2i \end{pmatrix}$$

$\langle z | w \rangle_{\mathbb{C}^n} = w^* \cdot z$ (qualcuno scrive $z^* \cdot w$: è diverso ; teoria uguale)

Def: dato V sp. vett. su $\mathbb{C}$ chiamo $f: V \times V \to \mathbb{C}$

- sesquilineare se è
  - lin. a sinistra $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 f(v_1, w) + \lambda_2 f(v_2, w)$
  - antilin. a destra $f(v_1, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \overline{\lambda_1} \cdot f(v, w_1) + \overline{\lambda_2} \cdot f(v, w_2)$
- hermitiana se $f(w, v) = \overline{f(v, w)}$ $\left(\Rightarrow f(v,v) = \overline{f(v,v)} \Rightarrow f(v,v) \in \mathbb{R} \right)$
- def. pos. se $f(v,v) > 0 \quad \forall v \neq 0$.
- è prod. scal. hermitiano se sesquilin / hermitiano / def. pos.

Oss: $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n}$ soddisfa tutte:

- $\langle \lambda z + \mu \cdot u | w \rangle = w^* \cdot (\lambda z + \mu u) = \lambda w^* z + \mu w^* u = \lambda \langle z | w \rangle + \mu \langle u | w \rangle$

• $\langle z | \lambda u + \mu w \rangle = (\lambda u + \mu w)^* \cdot z = (\bar{\lambda} u^* + \bar{\mu} w^*) \cdot z$

$= \bar{\lambda} u^* \cdot z + \bar{\mu} w^* z = \bar{\lambda} \cdot \langle z | u \rangle + \bar{\mu} \langle z | w \rangle$

• $\langle w | z \rangle = z^* \cdot w = {}^t(z^* \cdot w) = {}^t w \cdot \bar{z} = \overline{w^* \cdot z} = \overline{\langle z | w \rangle}$

• $\langle z | z \rangle = {}^t\bar{z} \cdot z = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 > 0$ se $z \neq 0$.

La teoria su $\mathbb{C}$ è ^quasi^ identica a quella su $\mathbb{R}$: ricordare lin. a sin
ma non a dx : no simm.

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$; $\langle \cdot | \cdot \rangle_A : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

$\langle z | w \rangle_A = w^* \cdot A \cdot z$

Fatti:

• le sesquilineari su $\mathbb{C}^n$ sono tutte e sole le $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$
• $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è hermitiana $\Longleftrightarrow$ $A^* = A$

diremo: A hermitiana.

A hermitiane se $A^* = A$ cioè ${}^t\bar{A} = A$

Es: $\begin{pmatrix} -7 & 4-3i \\ 4+3i & 11 \end{pmatrix}$

Q: $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ def pos. ?

Gram-Schmidt: $v_1, \dots, v_n$ base $\rightsquigarrow$ $w_1, \dots, w_n$ base ortonormale

- $w_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$

- $z_2 = v_2 - \langle v_2 | w_1 \rangle \cdot w_1$ $\qquad w_2 = \dfrac{z_2}{\|z_2\|}$

- $z_3 = v_3 - \langle v_3 | w_1 \rangle \cdot w_1 - \langle v_3 | w_2 \rangle \cdot w_2 \qquad \dots$

$W \subset V$ sttsp. $w_1, \dots, w_k$ base ortogonale

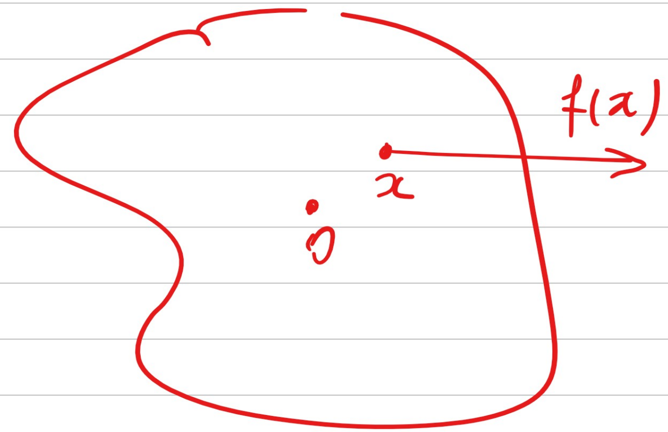
$$\Rightarrow P_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v / w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i$$

———— o ————

DIAGONALIZZAZIONE

Data $f: V \to V$ lineare cerco una base $\mathcal{B}$ t.c. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sia "facile" (con molti 0: sperabilmente diagonale).

Motivazione: corpo rigido in equilibrio sottoposto a sforzi



$f(x) \in \mathbb{R}^3$

$O =$ baricentro

$f(0) = 0$

Approssimazione lineare:

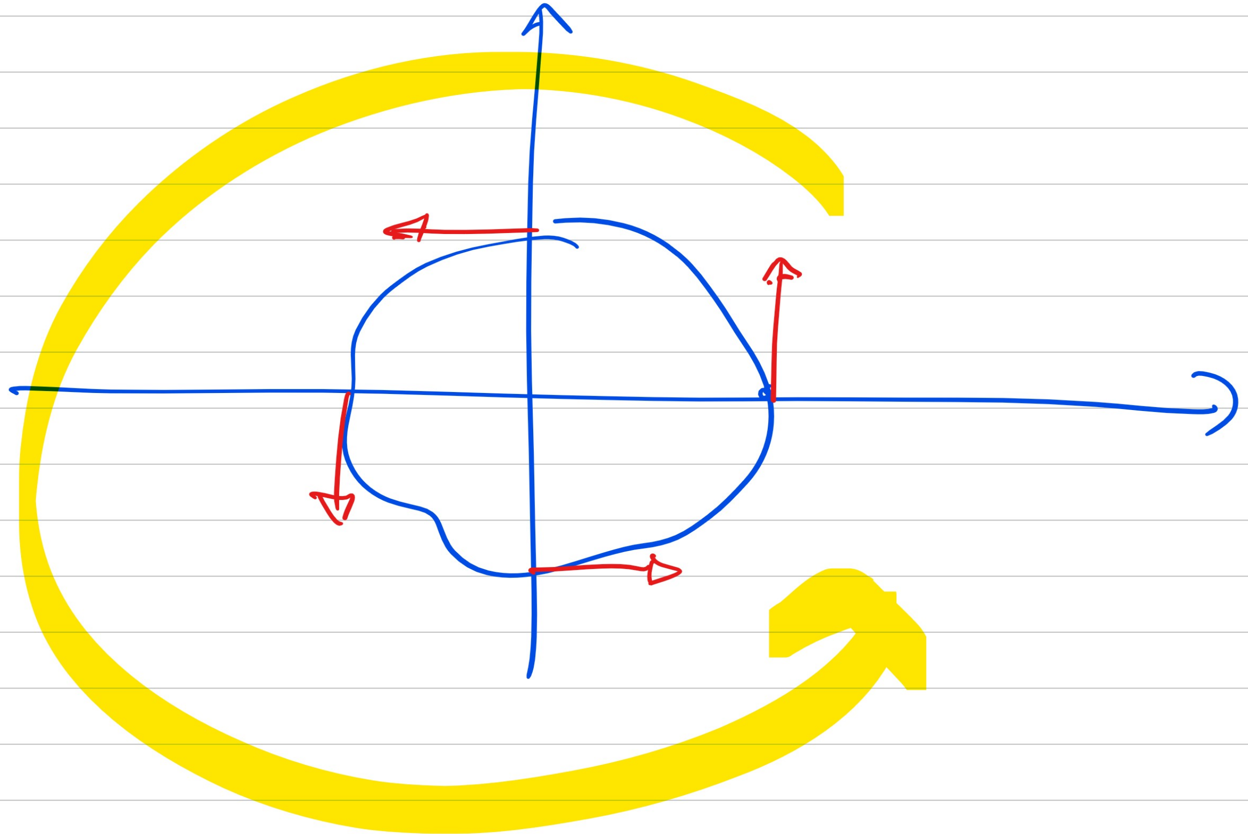
$f(x) = M \cdot x \qquad M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \underbrace{\mathcal{S}_n}_{\text{simm}} \oplus \underbrace{\mathcal{A}_n}_{\text{antisimm}}$$

$$M = S + A \qquad S = \frac{1}{2}(M + {}^tM) \qquad A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$$

Fatto: A provoca un movimento rigido del corpo

Es: in $\mathbb{R}^2$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

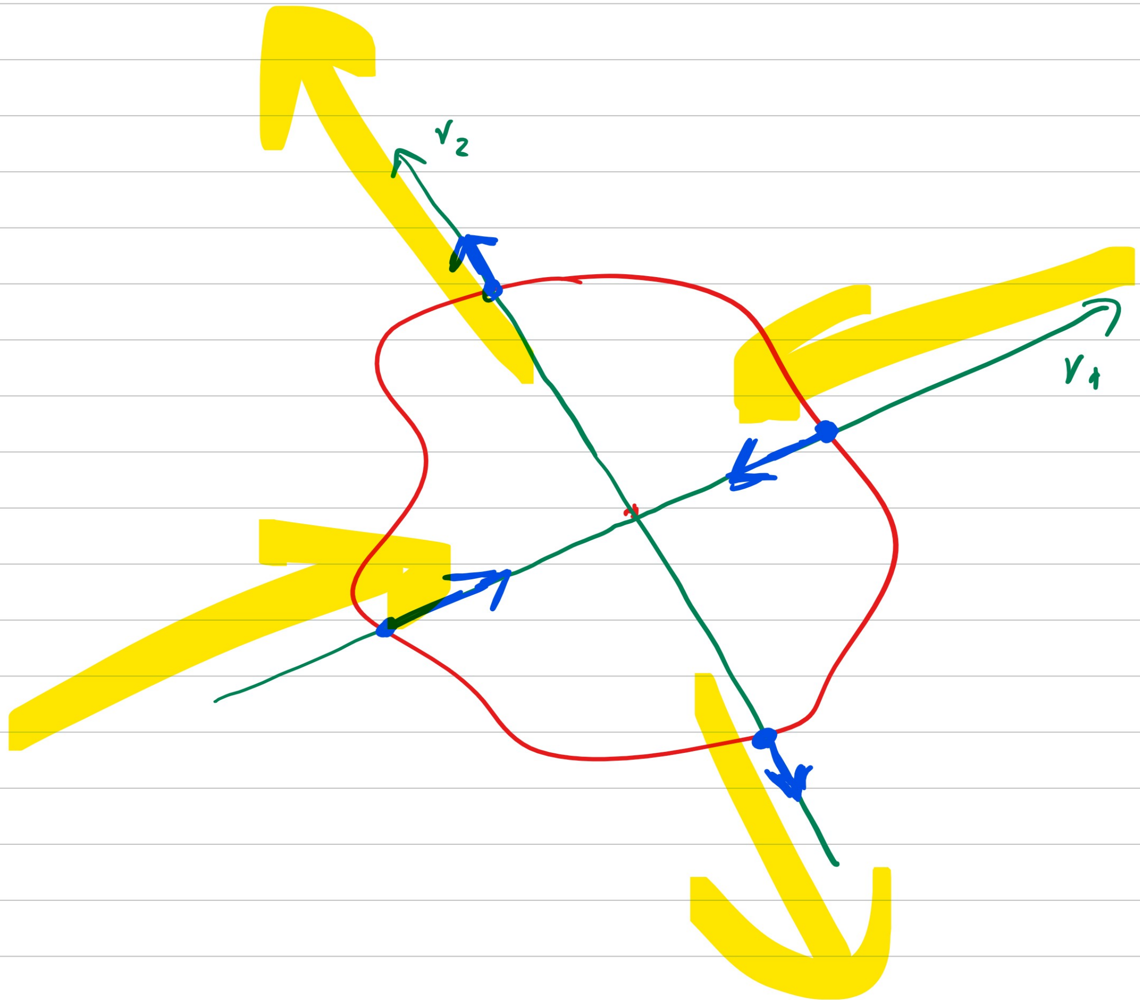


Invece $S \in \mathcal{S}_3$ comporta gli sforzi di deformazione.

Es: $\quad S = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 7 \\ 5 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Fatto</u>: per ogni matrice $S \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica vista come $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ esiste una base <u>ortonormale</u> $\mathcal{B}$ t.c. $[S]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ cioè

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n) \qquad S \cdot v_j = \lambda_j \cdot v_j .$$



$$[S]^{(v_1,v_2)}_{(v_1,v_2)} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Oss: non ha senso porsi il problema di cercare basi che rendano facile una matrice $f: V \to W$ (o per $f: V \to V$ ma scegliendo basi diverse in partenza e arrivo).

Infatti: posso sempre trovare basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ t.c.

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Basta prendere $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_k, \underbrace{v_{k+1}, \dots v_n}_{\text{base } \ker(f)})$

$$\mathcal{C} = (f(v_1), \dots, f(v_k), w_{k+1} \dots w_m)$$

$k = \operatorname{rank}(f)$

Problema: ancora $\mathcal{B}$ t.c. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sia facile; $f: V \to V$.

Prop: se A_0 è una matrice associata a f come sopra, le altre sono tutte e sole quelle del tipo $M^{-1} \cdot A \cdot M$ con $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ invertibile.

($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$)

Dim: $A_0 = [f]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0}$; $\mathcal{B}$ altra base, M matrice di cambio

$$\Longrightarrow A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M^{-1} \cdot A_0 \cdot M.$$

Viceversa se $A = M^{-1} \cdot A_0 \cdot M$ ho $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cdot M$.

$\square$

Def: due matrici A, A' sono coniugate se $\exists M$ t.c. $A' = M^{-1} \cdot A \cdot M$.

qualcuno dice "simili"

Problema: data $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ cerco M t.c.
$M^{-1} \cdot A \cdot M$ sia "facile".

Def: $f: V \to V$ è diagonalizzabile se $\exists \mathcal{B}$ base t.c.
$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ cioè $\exists \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base
t.c. $f(v_j) = \lambda_j \cdot v_j \quad j = 1 \dots n$.

Dunque $A \in M_{n \times n}$ è diagonalizzabile se esiste M invertibile t.c.
$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ cioè $M = (v_1, \dots, v_n)$ e
$A \cdot v_j = \lambda_j \cdot v_j \quad j = 1 \dots n$

__Es:__ $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

cerco una base $\mathcal{B}$ fatta di vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ t.c. $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} 4x + 7y = \lambda x \\ x - 2y = \lambda y \end{cases} \qquad \begin{cases} (4-\lambda) \cdot x + 7y = 0 \\ x + (-2-\lambda) y = 0 \end{cases}$$

Esistono soluz non nulle solo se $\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 7 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0 \qquad (\lambda - 5)(\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = -3$$

v_1: $\begin{cases} 4x_1 + 7y_1 = 5x_1 \\ x_1 - 2y_1 = 5y_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x_1 + 7y_1 = 0 \\ x_1 - 7y_1 = 0 \end{cases} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

v_2: $\begin{cases} 4x_2 + 7y_2 = -3x_2 \\ x_2 - 2y_2 = -3y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x_2 + 7y_2 = 0 \\ x_2 + y_2 = 0 \end{cases} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Es $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x - 2y = \lambda x \\ 2x + 5y = \lambda y \end{cases} \qquad \begin{cases} (1-\lambda)x - 2y = 0 \\ 2x + (5-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \qquad (\lambda - 3)^2$$

$$\begin{cases} x - 2y = 3x \\ 2x + 5y = 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

trovo un solo vettore che va in multiplo di sé stesso

$\Longrightarrow$ No base

$\Longrightarrow$ non diagonalizzabile