PARAGRAFO 9.3.3

Rette e piani nello spazio

In $\mathbb{R}^2$ considero la retta

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0 \right\}$$

noto che

$$r = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^{\perp}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = ax + by$$

In $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^{\perp} \text{ è un piano}$$

si tratta del piano costituito dai vettori

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tali che}$$

$$ax + by + cz = 0$$

Consideriamo ora l'intersezione.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}^{\perp} \cap \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}^{\perp} =$$

sono i vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tali che

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{cases}$$

è una retta se $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ sono LIN INDIP

In particolare dati $v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$ e

$v_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ lin INDIP

se vogliamo trovare una base di

$v_1^\perp \cap v_2^\perp$, possiamo considerare

il vettore

$$\begin{pmatrix} \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \\ -\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1 \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{pmatrix}$$

che denoteremo $v_1 \wedge v_2$ wedge
prodotto vettoriale

Si nota che $v_1 \wedge v_2$ è una base

di $\underbrace{v_1^\perp \cap v_2^\perp}_{\text{è una retta.}}$.

A pag 124 del libro avete già visto come mai

$$v_1 \wedge v_2 \in v_1^\perp \cap v_2^\perp$$

e anche come mai $v_1 \wedge v_2 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Per questo, si nota

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

la matrice ha rango 2, dunque almeno uno dei minori 2x2 ha det $\neq 0$

Es 9.3.17 a)

Scrivere in forma parametrica la retta ortogonale al piano

$$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\2\\7\end{pmatrix}\right)$$

Risposta. Tale retta è

$$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-3\\2\\7\end{pmatrix}\right)$$

$$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}30\\-32\\22\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix}4 & 2\\-1 & 7\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}5 & -3\\-1 & 7\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}5 & -3\\4 & 2\end{pmatrix}$$

l'equazione parametrica è

$$t\begin{pmatrix}15\\-16\\11\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

§ 9.3.18

Dare equazione cartesiana del piano ortogonale alla retta

$$\begin{cases} 2x + 5y - z = 0 \\ 6x - 7y + z = 0 \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la retta in questione è $v_1^\perp \cap v_2^\perp$

Osserviamo che

$$v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -44 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il piano ortogonale a $v_1^\perp \cap v_2^\perp$ è prop. span (v_1, v_2)

ha equazione.

$\to$ $-2x - 8y - 44z = 0$

$x + 4y + 22z = 0$

MATRICI SIMMETRICHE E ORTOGONALI

Sia V sp. vett. con prodotto scalare.

Studieremo le applic. lineari

$$f : V \to V \quad \text{tali che}$$

$$\langle v | f(w) \rangle = \langle f(v) | w \rangle$$

$\forall\, v, w \in V$

Tali f si chiamano AUTOAGGIUNTE

Studieremo anche le applicazioni lineari

$f: V \to V$ tali che

$$\langle f(v) | f(w) \rangle = \langle v | w \rangle$$

$\forall\, v, w \in V$

Tali f si chiamano ORTOGONALI.

Poiché $\langle \,|\, \rangle$ determina $\|\ \|$

e viceversa $\|\ \|$ determina $\langle \,|\, \rangle$

si deduce che f ORTOGONALE

$\Rightarrow$ f ISOMETRIA

Sulle aggiunte dimostriamo

<u>Prop 9.4.1</u> Sia V di dim finita.

Una applic lineare $p : V \to V$ è la proiezione ortogonale su un sottospazio se e solo se è autoaggiunta e $p \circ p = p$.

<u>Dim</u> Sia $p = p_W$ la proiezione ortogonale su W.

Sappiamo già che vale $p \circ p = p$

Prendi $v_1, v_2 \in V$

Chiamo $p(v_1) = w_1$
$p(v_2) = w_2$

$V = W \oplus W^{\perp}$

Allora $v_1 = \underset{\in W}{w_1} + \underset{\in W^\perp}{z_1}$

$v_2 = \underset{\in W}{w_2} + \underset{\in W^\perp}{z_2}$

Voglio vedere se p è autoaggiunta

$\langle p(v_1) | v_2 \rangle$ desidero $= \langle v_1, p(v_2) \rangle$

$\langle p(v_1) | v_2 \rangle = \langle w_1 | w_2 + z_2 \rangle =$

$= \langle w_1 | w_2 \rangle + \underbrace{\langle w_1 | z_2 \rangle}_{\text{è } = 0} =$

$= \langle w_1 | w_2 \rangle =$

$= \langle w_1 + z_1 | w_2 \rangle = \langle v_1 | p(v_2) \rangle$

Viceversa supponiamo p autoaggiunta e

$p \circ p = p$. Dimostriamo che p è una proiezione ortogonale su $\operatorname{Im}(p) = W$.

Per far questo abbiamo dim che $\operatorname{Ker}(p)$, che chiamo Z, è $= W^{\perp}$

$$V = \underset{\substack{\uparrow \\ \operatorname{Im} p}}{W} \oplus W^{\perp}$$

Sia P_W la proiezione su W.
Poiché sia p sia p_W lasciano fissi i vettori di W, per far vedere che $p = p_W$ basta mostrare che $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} p_W$

ossia che $W^\perp = Z$.

Sia $w \in W$, sia $z \in Z$

$$\langle w, z \rangle \underset{\substack{\text{perché } p \text{ lascia}\\ \text{fissi i punti di } W}}{=} \langle p(w) \mid z \rangle \overset{\text{perché } p \text{ è autoaggiunto}}{=} \langle w, p(z) \rangle =$$

$$= \langle w, 0 \rangle = 0$$

Dunque $Z \subseteq W^\perp$

per ragioni di dimensione si conclude che $Z = W^\perp$. $\left(\begin{array}{l} \dim Z = n - \dim W \\ \dim W^\perp = n - \dim W \end{array}\right)$ $\square$

Sia ora $\langle \ | \ \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$.

<u>Lemma</u> Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$

allora $\underline{\underline{\langle x \mid Ay \rangle = \langle {}^tA x \mid y \rangle}}$

Ricordo

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= (a, b, c) \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} =$$

$$= {}^t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

Nel nostro caso verifichiamo.

$$\langle x \mid Ay \rangle = {}^tx\, Ay$$

$$\langle {}^tA x, y \rangle = {}^t({}^tAx)\, y =$$

$$= {}^tx\, {}^t{}^tA\, y = {}^tx\, A y$$

ricordo che ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

Oss Dunque A è autoaggiunta se e solo A è matrice simmetrica.

Analogamente A è ORTOGONALE se e solo se ${}^tA = A^{-1}$

In concreto

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & \vert \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} v_1 & v_2 & & v_n \end{matrix} \end{array} \quad \text{colonne.}$$

$${}^tA \cdot A = Id \quad \text{cosa vuol dire?}$$

$$ {}^tA = \begin{pmatrix} \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \end{pmatrix} \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ \\ v_n \end{array} $$

sono elementi righe

$$ \begin{array}{l} v_1 \\ \\ \\ v_n \end{array} \begin{pmatrix} \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} | & | & & | \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \quad & v_n \end{array} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Si deduce che A è ortogonale se e solo se le sue colonne sono una base ORTONORMALE

Esempio

$$ A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} $$

Rotazione in $\mathbb{R}^2$ di un angolo ϑ.

A è ORTOGONALE

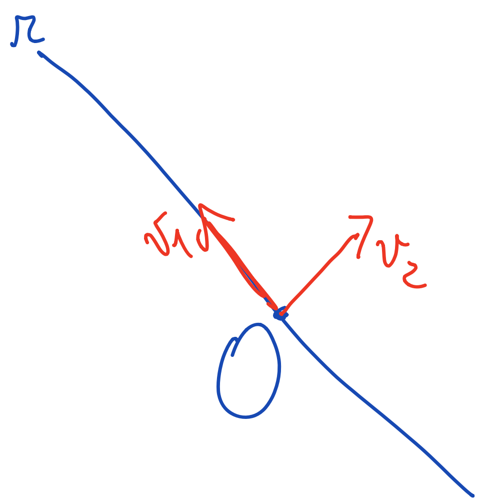
Infatti:

$$A^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta}}_{\text{è il det}} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

e si nota che

$$A^{-1} = {}^tA .$$

<u>Esempio</u>: La riflessione S rispetto ad una retta in $\mathbb{R}^2$ è ORTOGONALE



Rispetto alla base v_1, v_2 la matrice di S è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e $A^{-1} = {}^tA$

Dunque anche la simmetria S è ORTOGONALE (Vale anche ${}^tA = A$)

§ 9.4.1 c) In $\mathbb{R}^3$.

Determinare la matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ associata risp. alla base canonica alla proiezione ORTOGONALE P_W dove.

$$W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

$\uparrow \qquad \uparrow$
$v_1 \qquad v_2$

$$W^\perp = \text{Span}(v_1 \wedge v_2)$$

$$P_W(v) = v - \alpha\, v_1 \wedge v_2$$

Calcolo $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = -26 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P_W(v) = v - \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dipende linearmente dalle coordinate di v

Come trovare α? Impongo le proprietà di P_W.

Per esempio
Voglio che se $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P_W(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_W\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}-\alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

e voglio che sia $=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Scriviamolo in coordinate:

$$v=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$\alpha(x_1,x_2,x_3)$ Voglio che,

$$\alpha(-1,1,1)=1$$

$$\alpha(4,3,1)=0$$

$$\alpha(2,-5,7)=0$$

$a\,x_1+b\,x_2+c\,x_3$ altrimenti un sistema.

$$\begin{cases} a(-1)+b\cdot 1+c\cdot 1=1 \\ a\,4+b\,3+c\,1=0 \\ a\,2+b(-5)+c\,7=0 \end{cases}$$

Risolvo e trovo

$$a=-\frac{1}{3} \qquad b=\frac{1}{3} \qquad c=\frac{1}{3}$$

$$P_W(v)=v-\frac{-x_1+x_2+x_3}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

la cui matrice è $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$

Es 9.4.2 Trovare la matrice X che definisce una applic. autoaggiunta rispetto al prod scalare

$$\langle \quad | \quad \rangle_{\begin{pmatrix}2&-1\\-1&3\end{pmatrix}}$$

e tale che

$$X \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Risposta In generale X è autoaggiunta rispetto ad un prod. scalare $\langle \; | \; \rangle_A$ se e solo se

$$\langle Xv \,|\, w \rangle_A = \langle v \,|\, Xw \rangle_A$$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow$$

$$({}^t v \, {}^t X) A \underline{w} \qquad ({}^t v) \underline{\underline{A}} (X w)$$

ossia X è autoaggiunta se e solo se

$$ {}^t X A = A X $$

Nel caso in questione

$$ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} $$

se $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

$$ \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} $$

$$ \downarrow $$

$$ \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 & -x_1 + 3x_3 \\ 2x_2 - x_4 & -x_2 + 3x_4 \end{pmatrix} $$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 & 2x_2 - x_4 \\ -x_1 + 3x_3 & -x_2 + 3x_4 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$-x_1 + 3x_3 = 2x_2 - x_4$$

La condizione

$$X \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

implica le altre due equazioni

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Le tre equazioni, una volta risolte portano a

$$X = \begin{pmatrix} t+2 & 2t-1 \\ t & 2t \end{pmatrix}$$

$$\forall \, t \in \mathbb{R}$$