

"ON AIR", alle 8,40.

MI SENTITE?

ESERCIZIO 9.2.1

$$f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$q: V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$q(v) = f(v, v)$$

Conoscendo q determinare f .

9.2.1 b)

$$V = \mathbb{R}^2, q(x) = \underline{3}x_1^2 + \underline{2}x_1x_2 - \underline{x_2^2}$$

● $q(x) = (x_1, x_2) \overset{\uparrow}{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{3}x_1^2 + 2x_1x_2 - \underline{x_2^2}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \textcircled{1} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$$

$$f_A = (y_1, y_2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

9.2.1 c)

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$q(x) = \underbrace{-2x_1^2}_{-x_1x_2} + \underbrace{x_2^2}_{+3x_1x_3} - \underbrace{5x_3^2}_{+2x_2x_3}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$f = \langle, \rangle_A$$

9.2.1 f)

$$V = \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$$

$$q(p(t)) = p(1) \cdot p(-2)$$

Illustriamola più da vicino

$$p(t) = a + bt + ct^2 \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$$

$$q(p(t)) = (a + b + c) (a - 2b + 4c)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $p(1)$ $p(-2)$

$$\begin{aligned} &= a^2 - 2ab + 4ac + ba - 2b^2 + 4bc \\ &\quad + ca - 2bc + 4c^2 = \\ &= a^2 - 2b^2 + 4c^2 - ab + 5ac + 2bc \end{aligned}$$

Riassumendo

$$q(a + bt + ct^2) = \underline{a^2 - 2b^2 + 4c^2} - \underline{ab} + \underline{5ac} + \underline{2bc}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \\ \frac{5}{2} & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$f = \langle , \rangle_A$$

$$f(a + bt + ct^2, a' + b't + c't^2) =$$

$$= (a', b', c') \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \\ \frac{5}{2} & 1 & 4 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Esercizio 9.2.3

$$V = \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \quad \text{con prodotto scalare}$$

$$\langle p(t) | q(t) \rangle = p(0)q(0) +$$

$$+ p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

Determinare un polinomio di norma $\sqrt{5}$

ortogonali a $1+t$ e a $1+t^2$

Noi dunque cerchiamo un polinomio

$p(t) = a + bt + ct^2$ che deve soddisfare

le seguenti 3 condizioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle a + bt + ct^2, a + bt + ct^2 \rangle = \sqrt{5} \\ \langle a + bt + ct^2, \underline{1+t} \rangle = 0 \\ \langle a + bt + ct^2, \underline{1+t^2} \rangle = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \cdot a + (a+b+c)(a+b+c) + (a+2b+4c)^2 = \sqrt{5} \\ a \cdot 1 + (a+b+c)2 + (a+2b+4c)3 = 0 \\ a \cdot 1 + (a+b+c)2 + (a+2b+4c)5 = 0 \end{array} \right.$$

sono un sistema lineare.

RISOLVETELO

e imparate che cosa è

$$t \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}$$

RICEVIMENTO LUNEDÌ ALLE 17

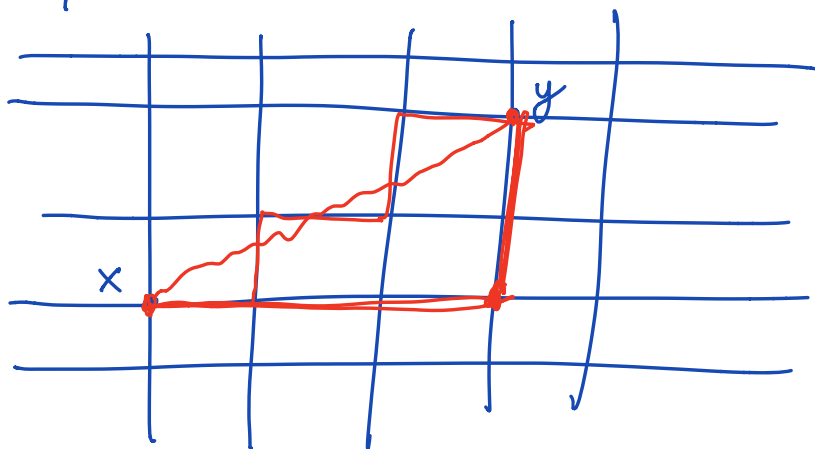
(PRENOTARSI VIA MAIL ENTRO DOMENICA).

9.2.4 b Provare che

$$NVC(x, y) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|$$

è una distanza in $\mathbb{R}^n$.

NEY YORK



Bisogna verificare.

- $NY(x, y) > 0$ se $x \neq y$ e
 $NY(x, x) = 0 \quad \forall x$

BANALE se $x \neq y$ hanno almeno una ~~co~~ordinata diversa, diciamo $x_2 \neq y_2$ e allora

$$\sum |x_j - y_j| \geq |x_2 - y_2| > 0$$

$NY(x, x) = 0$ perché

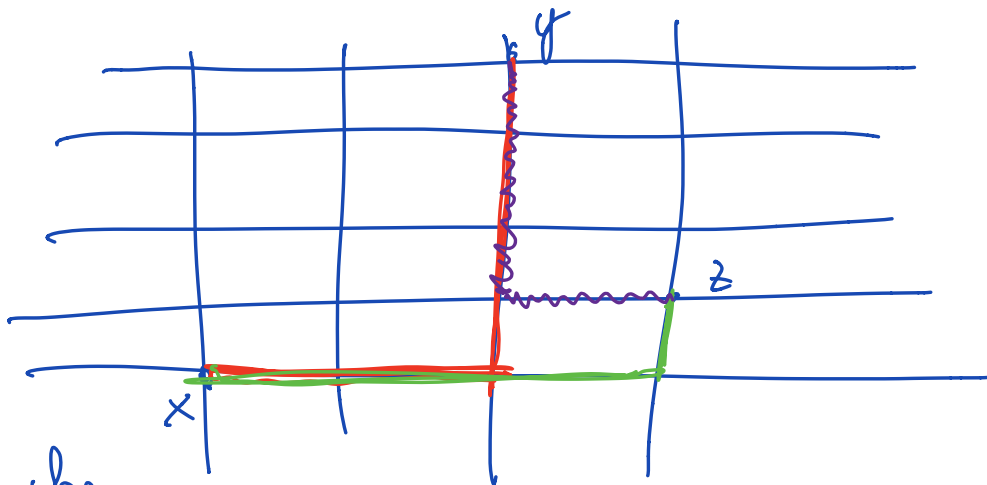
$$\sum |0| = 0$$

- $NYC(x, y) = NYC(y, x)$

BANALE

perché $|x_j - y_j| = |y_j - x_j|$
 $\forall j$.

- $NYC(x, y) \leq NYC(x, z) + NYC(z, y)$
 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$



Osserva che

$\forall j$ vale $|x_j - y_j| \leq |x_j - z_j| + |z_j - y_j|$

questo vale e quindi

$$\sum_j |x_j - y_j| \leq \sum_j |x_j - z_j| +$$

$$\uparrow$$
$$NVC(x, y)$$

$$+ \sum_j |z_j - y_j|$$

$$\uparrow$$
$$NVC(z, y).$$

Esercizio 9.3.2

In $\mathbb{R}^4$ determinare una base ortogonale

del sottospazio ortogonale a

$$W = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ è ortogonale a } W$$

(ovvero appartiene a $W^\perp$)

o.e. e solo o.e.

SI STA
USANDO
IL PRODOTTO
SCALARE
STANDARD

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Risolvendo il sistema trovate una base di $W^\perp$ formata da due vettori w_1 e w_2 .

Per avere una base ortogonale posso applicare G-S

$$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$$

$$v_2 = w_2 - \langle w_2, v_1 \rangle \cdot v_1$$

e v_1, v_2 è la base ortogonale cercata. (visto che è richiesta solo l'ortogonalità, non occorre normalizzare v_2).

Esercizi 9.3.3 b)

nello spazio $\mathbb{R}^2$ munito del prodotto
scalare $\langle, \rangle_A$ con $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$
determinare una base ortonormale (rispetto
a $\langle, \rangle_A$) del sottospazio ortogonale
(rispetto a $\langle, \rangle_A$) al vettore
 $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Per prima cosa $W = \text{Lspan} \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$.

$W^\perp$ deve calcolarlo. Cerco i vettori $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

tali che

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

Ossia

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} = \underbrace{13x_1 + 8x_2 = 0}$$

● $W^\perp = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -8 \\ 13 \end{pmatrix} \right)$

Se si vuole sapere quali sono in $W^\perp$ i
vettori di norma 1 si può calcolare:

$$(-8t, 13t) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8t \\ 13t \end{pmatrix} =$$

$$= (-8t, 13t) \begin{pmatrix} -24t - 26t \\ 16t + 65t \end{pmatrix} =$$

$$= (-8t, 13t) \begin{pmatrix} -50t \\ 81t \end{pmatrix} =$$

$$= 400t^2 + 13 \cdot 81t^2 =$$

$$\begin{array}{r} 810 + \\ 243 \\ \hline 1053 \end{array}$$

$$= \underline{\underline{1453t^2}}$$

Punque

$$\sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} -8t \\ 13t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8t \\ 13t \end{pmatrix} \right\rangle_A} = \sqrt{1453t^2}$$

abbiamo che sia 1, per cui

solgo $t = \frac{1}{\sqrt{1453}}$ (Va bene anche $t = -\frac{1}{\sqrt{1453}}$)

La base ortogonale richiesta è data da

$$\frac{1}{\sqrt{1453}} \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

NOTA. Potrebbe dare semplicemente

$$\sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \end{pmatrix} \right\rangle_A} = \sqrt{1453}$$

e dunque si poteva porre subito

$$\frac{1}{\sqrt{1453}} \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \end{pmatrix} \text{ che ha}$$

norma 1 rispetto a $\langle, \rangle_A$.

9.3.3 d) Cosa cambia:

siamo in $\mathbb{R}^3$, dunque se ponete

$$W = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

risulta che $W^\perp$ ha dimensione 2
e dunque sarà

$$W^\perp = \underline{\text{span} (w_1, w_2)}.$$

Ora, w_1, w_2 potrebbero non essere
ortonormali, allora applicate G-S

$$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|_A}$$

$$v_2 = w_2 - \langle w_2, v_1 \rangle_A v_1$$

e v_1, v_2 è la base
ortogonale cercata.

Come calcolo $W^\perp$

Calcolo

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

è una equazione in 3 variabili,
e dunque descrive un piano passante
per $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.