

V sp. vett. su $\mathbb{R}$, con $\langle \cdot, \cdot \rangle$; $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

distanze associate: $d(v, w) = \|w - v\|$. Proprietà:

- $d(v, w) \geq 0$, nulla solo se $w = v$
 - $d(v, w) = d(w, v)$
 - $d(v, w) \leq d(v, z) + d(z, w)$; uguale solo se $z \in [v, w]$.
-

Sist. vett. ortog $v_1, \dots, v_k$ se $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$.

Visto: $B = (v_1, \dots, v_m)$ base ortog di $V \Rightarrow ([v]_B)_i = \frac{\langle v_i, v \rangle}{\|v_i\|^2}$.

- la i -esima coord dipende solo da v_i .

Falso per basi qualsiasi:

$$B = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad B' = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 1/10 \\ 3/10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4\alpha + 2\beta = 1 \\ 3\alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

$$[v]_{B'} = \begin{pmatrix} 5/17 \\ -5/17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4\alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha + 5\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = -3/5\alpha \\ \alpha = 5/17 \end{cases}$$

- trovare le coordinate non riduce risolvere sistemi

$$B = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} \right)$$

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$8 - 2 - 6 = 0 \checkmark$$

$$-4 - 16 + 20 = 0 \checkmark$$

$$-2 + 32 - 30 = 0 \checkmark$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} (20 - 1 - 6) / (16 + 1 + 4) \\ (10 + 2 + 9) / (4 + 4 + 9) \\ (-5 + 16 - 30) / (1 + 25 + 100) \end{pmatrix}$$

— o —

Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt:

def: ortonormale =
ortogonale e tutti
vettori unitari.

Teo: data una base $v_1, \dots, v_m$ di V il seguente procedimento si può eseguire e produce una base ortonormale $w_1, \dots, w_m$ di V :

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

- $k \geq 1$, costruiti $w_1, \dots, w_k$ definisco

$$\tilde{w}_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1} / w_i \rangle \cdot w_i, \quad w_{k+1} = \frac{\tilde{w}_{k+1}}{\|\tilde{w}_{k+1}\|}.$$

(Si può eseguire: $\tilde{w}_{k+1} \neq 0$.)

Esempio: $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2 | w_1 \rangle \cdot w_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{21} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{21} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -55 \\ 38 \\ 37 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{\cancel{\frac{1}{21}} \begin{pmatrix} -55 \\ 38 \\ 37 \end{pmatrix}}{\left\| \cancel{\frac{1}{21}} \begin{pmatrix} -55 \\ 38 \\ 37 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} -55 \\ 38 \\ 37 \end{pmatrix}$$

$$N = 55^2 + 38^2 + 37^2$$

$$\tilde{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{21} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{N} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -55 \\ 38 \\ 37 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} -55 \\ 38 \\ 37 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \tilde{w}_3 / \|\tilde{w}_3\| \quad \leadsto (w_1, w_2, w_3) \text{ base orthonormale } \mathbb{R}^3, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

Dimo: Per vedere che il proc. si può eseguire dimostro per induzione che se sono giunto fino al passo k ho $\text{Span}(w_1, \dots, w_k) = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$.

Basta: $\tilde{w}_{k+1} = v_{k+1} + \text{el. di Span}(w_1, \dots, w_k)$
 $= v_{k+1} + \text{el. di Span}(v_1, \dots, v_k) \Rightarrow \tilde{w}_{k+1} \neq 0$

$k=1$ $w_1 = v_1 / \|v_1\|$ ok.

$k \geq 1$ $\tilde{w}_{k+1} = v_{k+1} + \text{el. di Span}(w_1, \dots, w_k)$
 $= v_{k+1} + \text{el. di Span}(v_1, \dots, v_k)$

$w_{k+1} = \tilde{w}_{k+1} / \|\tilde{w}_{k+1}\| \Rightarrow \text{Span}(w_1, \dots, w_{k+1}) = \text{Span}(v_1, \dots, v_{k+1})$.

Cio' dimostra altre due cose:

- $w_1, \dots, w_m$ è base
- la matrice di cambio da $v_1, \dots, v_m$ a $w_1, \dots, w_m$ è del tipo:

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \text{ } & \text{ } \end{matrix} & \begin{matrix} \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \text{ } & \text{ } \end{matrix} \end{pmatrix} *$$

Per la: $w_1, \dots, w_n$ ortog. tra loro (vettori ortog.).

Per induz. su k prova che $w_1, \dots, w_k$ sono $\perp$ tra loro.

$k=1$ OK

PI: suppongo $w_1, \dots, w_k \perp$ tra loro; devo vedere che $w_{k+1} \perp v_i$
 $i=1, \dots, k$

$w_{k+1} = \frac{\tilde{w}_{k+1}}{\|\tilde{w}_{k+1}\|}$: dunque basta vedere che $\langle \tilde{w}_{k+1}, w_j \rangle = 0$ per $j=1 \dots k$.

Infatti:

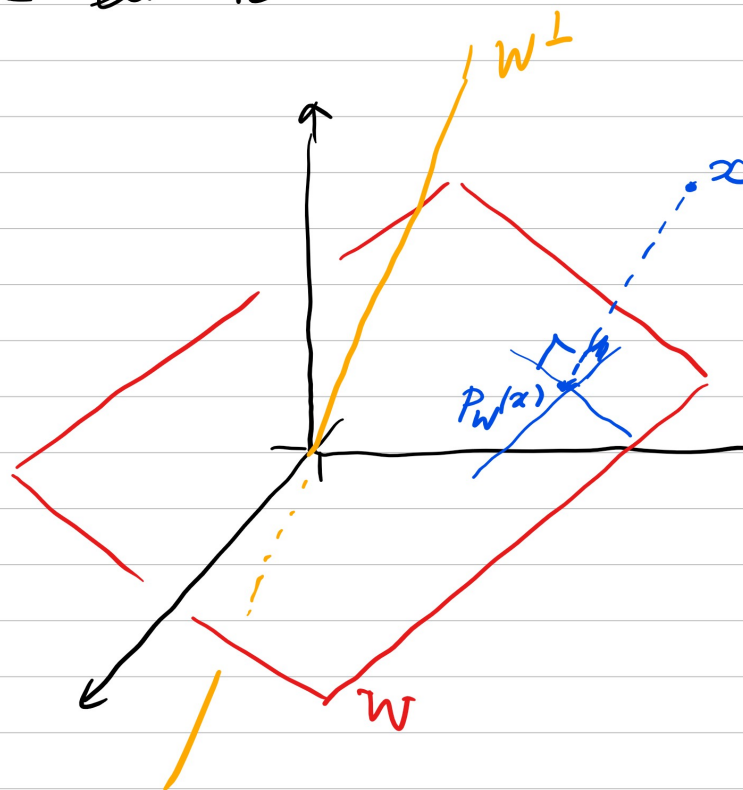
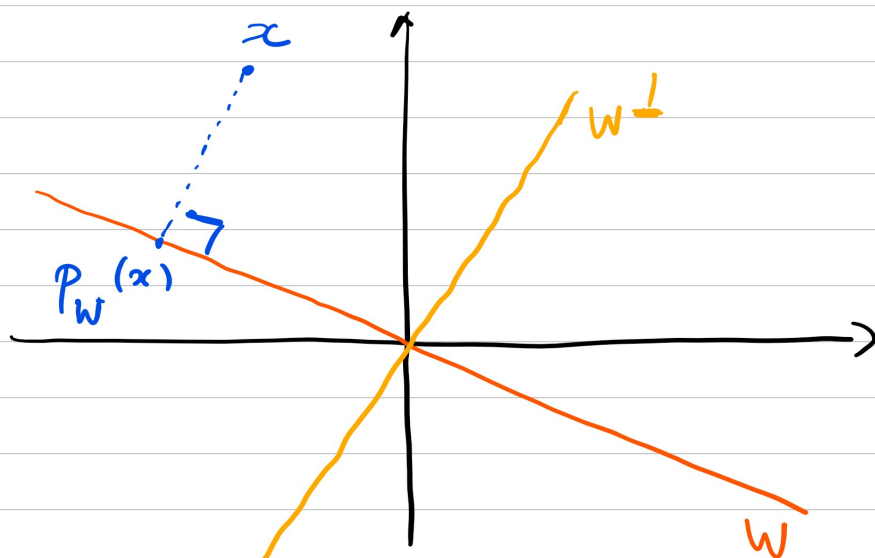
$$\begin{aligned}\langle \tilde{w}_{k+1}, w_j \rangle &= \left\langle v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1}, w_i \rangle \cdot w_i, w_j \right\rangle \\ &= \langle v_{k+1}, w_j \rangle - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1}, w_i \rangle \cdot \underbrace{\langle w_i, w_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \langle v_{k+1}, w_j \rangle - \langle v_{k+1}, w_j \rangle = 0\end{aligned}$$



Con: se $\dim(V) < +\infty$ e ho $v_1, \dots, v_k$ sistema ortog. di vettori $\neq 0$
allora posso completarlo a una base ortogonale.

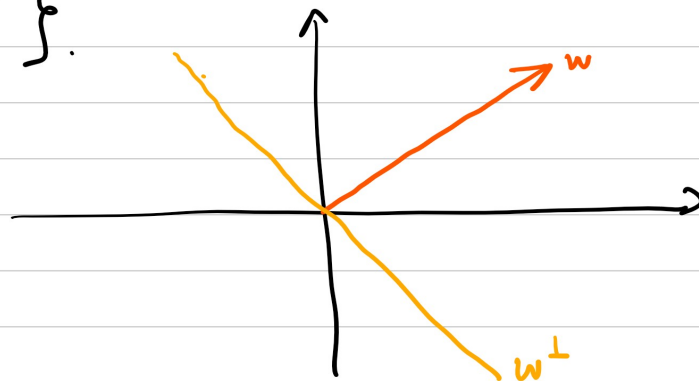
Dimo: completo a caso; ortonormalizzo con G-S; "denormalizzo" i primi k . 

Proiezione ortogonale nello geometria euclidea elementare:



In generale, dato $S \subset V$ sottospazio di V , possiamo
 $S^\perp = \{v \in V : \langle v | s \rangle = 0 \quad \forall s \in S\}$.

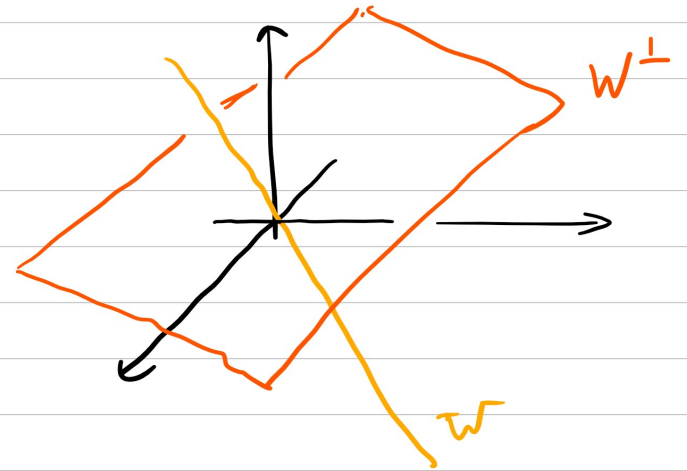
Oss: $S^\perp$ è sempre un sottospazio
 rettoriale.



Prop: se $\dim(V) < +\infty$ e $W \subset V$ è sottosp. h. $V = W \oplus W^\perp$.

Dim: •) $W \cap W^\perp = \{0\}$ infatti se $v \in W \cap W^\perp$ h.

$$\underbrace{\langle v | v \rangle}_{\substack{\uparrow \\ W^\perp}} = 0 \Rightarrow \underbrace{v}_{\substack{\uparrow \\ W}} = 0.$$



•) $W + W^\perp = V$; scelgo $w_1, \dots, w_k$ base ortonormale di W

completo e base $w_1, \dots, w_m$ ortonormale di V .

One dato $v \in V$ h.

$$v = \sum_{i=1}^m \underbrace{\frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2}}_{\text{unitari}} \cdot w_i = \underbrace{\sum_{i=1}^k \langle v | w_i \rangle \cdot w_i}_{\substack{\uparrow \\ W}} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^m \langle v | w_i \rangle \cdot w_i}_{\substack{\uparrow \\ W^\perp}}$$

$\uparrow$
 $\vec{e} \perp a \ w_1, \dots, w_k$
 $\Rightarrow \vec{e} \perp a \ W$



Def: chiamiamo $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ aperto se $\forall x \in \Omega \exists r$ t.c. $B(x, r) \subset \Omega$
 dove $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^m : d(x, y) < r\}$.

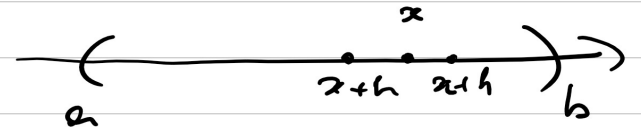
$m=1$: intervallo aperto (a, b) :



Cioè: " Ω è aperto se $\forall x \in \Omega$ ci si può spostare da x almeno un poco in tutte le direzioni rimanendo dentro Ω ".

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Def: dato $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ aperto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in \Omega$ e $v \in \mathbb{R}^m, v \neq 0$
 chiamiamo derivata direzionale di f in x nella direzione v

chiamo differenziale di f in x $df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots m}} \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$

Fatto:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{f} \circ \text{g} & & \\ & \text{g} & & \text{f} & \\ \Omega & \xrightarrow{\quad} & \Lambda & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^k \\ \cap & & \cap & & \\ \mathbb{R}^m & & \mathbb{R}^m & & \end{array}$$

$$\underbrace{d(f \circ g)(x)}_{k \times m} = \underbrace{df(g(x))}_{k \times m} \cdot \underbrace{dg(x)}_{m \times m}$$

$k \times m$

Def: dato $\Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ chiamo derivata parziale seconda in direz i, j

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(x)$$

Scrivo: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

$$\dim(V) < +\infty, W \text{ s.t.s.p.} \Rightarrow V = W \oplus W^\perp.$$

Def: chiamiamo proiezione ortogonale su W la proiezione su W associata a $V = W \oplus W^\perp$ indicata con P_W .

Oss: la proiezione su un sottosp. per una $\oplus$ predeterminata dipende anche dall'altro sottospazio:

$$V = W \oplus Z$$

$P \quad q$

$$V = W \oplus Z'$$

$P' \quad q'$

$$P \neq P'$$

Invece P_W dipende solo da W .

Teo: se $\dim(V) < +\infty$ e $W \subset V$ è sottosp. con base ortogonale $w_1, \dots, w_k$ allora

$$P_W(v) = \sum_{i=1}^k \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i.$$

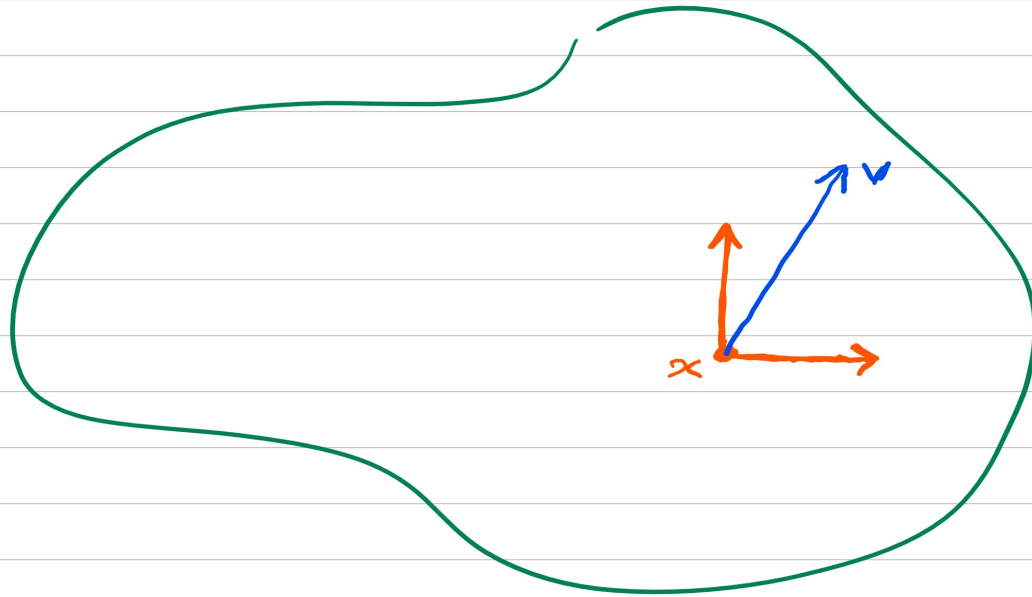
Quotante

$$\sum_{i=1}^k \frac{|\langle v | w_i \rangle|^2}{\|w_i\|^2} \leq \|v\|^2.$$

disuguaglianza di Bessel

Infine $P_W(v)$ è l'elemento di W avente minima distanza da v .

Fatto: se f è ripiegabile ho $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot v_i$.



Def: chiamo gradiente di f in x $\text{grad}(f)_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}$.

Derivazione di funz. composta: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Considero $f: \bigcap_{\mathbb{R}^m} \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$;

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}.$$

Nel caso particolare $v = e_i$ chiamiamo $\frac{\partial f}{\partial e_i}$ derivate parziali prima
 nella variabile x_i
 indicate $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Cioè:
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h}$$

dunque $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ è il limite del rapporto incrementale nella variabile x_i
 ignorando le altre variabili.

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}$ si calcola derivando rispetto a x_i considerando
 le altre variabili come parametri fissi.

Esempio: $f(x, y) = x^2 + 3xy^3 + e^{2x - 5y^2} + \cos(7x^3y - 5x)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 3y^3 + 2e^{2x - 5y^2} - \sin(7x^3y - 5x) \cdot (21x^2y - 5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 + 9xy^2 - 5y \cdot e^{2x - 5y^2} - \sin(7x^3y - 5x) \cdot (7x^3) -$$

Dim: completo a base $w_1, \dots, w_m$ ortogonale e ho

$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^k \frac{\langle v|w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i}_{P_W(v)} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^m \frac{\langle v|w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i}_{P_{W^\perp}(v)}$$

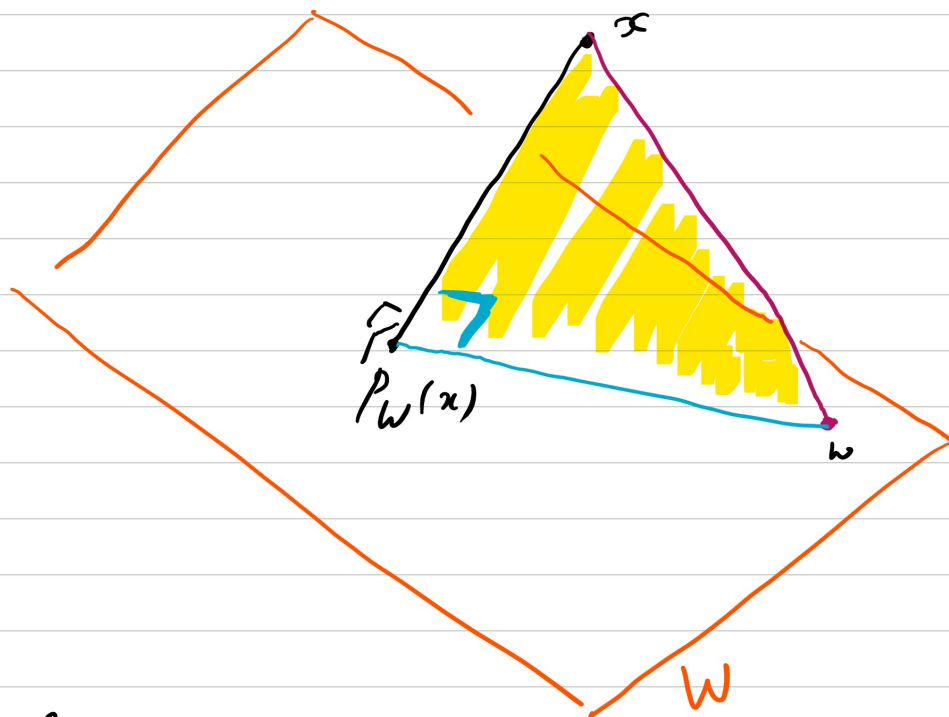
$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^m \frac{\langle v|w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^m \left\| \frac{\langle v|w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{|\langle v|w_i \rangle|^2}{\|w_i\|^4} \cdot \|w_i\|^2 = \sum_{i=1}^m \frac{|\langle v|w_i \rangle|^2}{\|w_i\|^2} \geq \sum_{i=1}^k \frac{|\langle v|w_i \rangle|^2}{\|w_i\|^2} \end{aligned}$$

Ultima affermazione; significato:

$$\Rightarrow d(w, x) > d(p_W(x), x)$$

$\Rightarrow p_W(x)$ è il pto di W
più vicino a x .

Dimostrazione: preliminari d'analisi.



Fatto: se f è ragionevole ho $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$.

Esercizio: per la $f(x, y) = \dots$

calcolare $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}$ $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}$ e verificare uguaglianza

Oss: posto $Hf(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots n}}$

matrice hessiana

ho che è simmetrica (per f ragionevole).