Geometria 10/3/2020

Def: se V sp. vett. su $\mathbb{R}$, $f: V \times V \to \mathbb{R}$ è detta

- bilineare se lin a sx e a dx
- simmetrica se $f(w,v) = f(v,w)$
- def. pos. se $f(v,v) > 0 \ \forall v \neq 0$.

9.1.5: dire se la $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è bil / simm / def. pos.

(b) $f(x,y) = 7x_1y_2 + \underline{8y_1y_2} - 5x_2y_1$

non è lin. a dx (contiene parte quadratica): $f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right) = 8 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

$2 \cdot f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = 2 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 1 = 16$

(d) $f(x,y) = -3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 8x_2y_1 + 7x_2y_2$

bil. ok

non è simm: i coeff di x_1y_2 e x_2y_1 sono diversi

$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = 2 \qquad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = 8$

(f) $f(x,y) = 7x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 - 4x_2y_2$

Bil ok Simm ok

$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = -4 < 0$ non def. pos

(h) $f(x,y) = 3x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2$

Bil, Simm. OK

def pos? $3x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$?

$f\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) = 0$ <u>non def. pos</u>

$f\left(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right) = 12 - 16 + 5 > 0$

$f\left(\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right) = 27 - 48 + 20 < 0$

(j) $4x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5y_1y_2 = \langle x | y \rangle_{\begin{pmatrix}4 & -3\\-3 & 5\end{pmatrix}}$

Bil, Simm OK $\quad 4x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$?

$(x_1 - 2x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + 2x_1^2 > 0$ <u>SI</u>

9.1.1. Provare che è prod. scal (?) $V = \mathbb{R}_{\leq 1}[t]$

$f: V \times V \to \mathbb{R}$ $\quad f(p(t), q(t)) = 5(p(1) - 2p(-2)) \cdot (q(1) - 2q(-2))$
$+ 3 \cdot (p(2) - 7p(-1)) \cdot (q(2) - 7q(-1))$

simm ok

bil ok

def pos: $\quad f(p(t), p(t)) = 5(p(1) - 2p(-2))^2 + 3(p(2) - 7p(-1))^2 \geq 0.$

nulla se solo se $\begin{cases} p(1) = 2p(-2) \\ p(2) = 7p(-1) \end{cases}$

$p(t) = a_0 + ta_1$: $\quad \begin{cases} a_0 + a_1 = 2(a_0 - 2a_1) \\ a_0 + 2a_1 = 7(a_0 - a_1) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a_0 - 3a_1 = 0 \\ 6a_0 - 9a_1 = 0 \end{cases}$

$a_0 = a_1 = 0$

<u>Sì</u>

(b) $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : \underline{x_1 - x_2 + x_3 = 0}\}$

$f(x,y) = -x_2y_1 - 2x_3y_1 - 3x_1y_1 - 3x_1y_3 + 5x_1y_2 + 5x_3y_2$

<u>bil ok</u>

<u>oss</u>: f è la restrizione a $V \times V$ di $g = \langle \cdot | \cdot \rangle_A$ $\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

g è bil su $\mathbb{R}^3$ <u>non simm</u>.

$f(x,y) = -(x_1+x_3)y_1 - 2x_3y_1 - 3x_1y_1 - 3x_1y_3 + 5x_1(y_1+y_3) + 5x_3(y_1+y_3)$

$= x_1y_1(-1-3+5)$

$+ x_1y_3(-3+5)$

$+ x_3y_1(-1-2+5)$

$+ x_3y_3(5) \quad = x_1y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 5x_3y_3$ <u>simm</u>

def. pos? $x_1^2 + 4x_1x_3 + 5x_3^2 = (x_1+2x_3)^2 + x_3^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$

9.1.4. Nello spazio $M_{2\times 3}$ con $\langle A|B\rangle = tr({}^tA\cdot B)$ calcolare angolo tra $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\cos(\vartheta) = \frac{\langle v|w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 3 + (-1)\cdot(-2) + 0\cdot 1 + (-2)\cdot 0 + 1\cdot(-1)}{\sqrt{4+1+1+0+4+1}\cdot\sqrt{1+9+4+1+0+1}} = \dots$$

9.1.6. Stabilire se $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ è def pos per $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simm. data

(j) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

def. pos. $\iff ax^2+2bxy+cy^2>0 \quad \forall \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$

$\iff$ $\begin{cases} (y=0) & ax^2>0 \quad \forall x\neq 0 \\ (y\neq 0) & a\left(\frac{x}{y}\right)^2+2b\left(\frac{x}{y}\right)+c>0 \quad \forall x, y\neq 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a>0 \\ at^2+2bt+c>0 \end{cases} \iff \begin{cases} a>0 \\ \Delta/4>0 \end{cases} \iff \begin{cases} a>0 \\ b^2-ac<0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a>0 \\ ac-b^2>0 \end{cases} \iff \begin{cases} a>0 \\ \det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}>0 \end{cases}$

(g) $A = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{\pi} & -1 \\ -\sqrt{\pi} & -\sqrt[3]{17} & 2 \\ -1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$

$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -\sqrt[3]{17} < 0$ non def. pos.

Teoria: Oss. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ la $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def pos. se e solo se

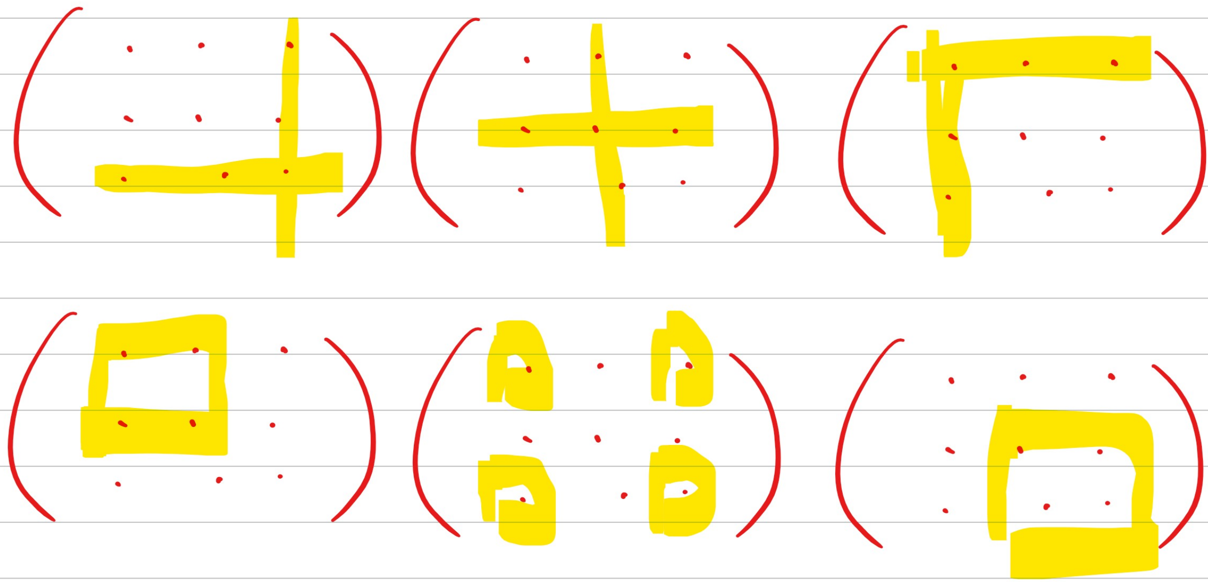
$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 > 0 \quad \forall x \neq 0 \iff \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0.$

(i) $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 2-k & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix}$ $0 < k < 2$

9.18 Dire se $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è prod. scal

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & \sqrt{\pi} \\ 5 & 3 & -1781 \\ \sqrt{\pi} & -1781 & e \end{pmatrix}$

Oss: Se $A \in M_{3\times3}$ definisce prod. scal. sono def. pos. le sue restrizioni a $\underbrace{\mathbb{R}^2\times\{0\}}_{z=0}$, $\underbrace{\mathbb{R}\times\{0\}\times\mathbb{R}}_{y=0}$, $\underbrace{\{0\}\times\mathbb{R}^2}_{x=0}$



$\det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow$ restriz. a $\mathbb{R}^2\times\{0\}$ non def pos $\Rightarrow$ non def. pos

[in realtà tutti: $\det\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\pi} \\ \sqrt{\pi} & e \end{pmatrix} < 0$ $\quad \det\begin{pmatrix} 3 & -1781 \\ -1781 & e \end{pmatrix} < 0$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$x^2+5y^2+3z^2+4xy-2yz = (x+2y)^2+(y-z)^2+2z^2>0 \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{sì}$$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$x^2+5y^2+2z^2-4xy+2xz+6yz \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$1+5+2-4-2-6<0 \quad \underline{\text{No}}$$

9.1.9 data $A \in M_{n\times n}$ simm pongo $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$ e provare

$\langle\cdot|\cdot\rangle_B$ def pos $\Leftrightarrow$ $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$

$$\langle\cdot|\cdot\rangle_B \text{ def.pos} \Leftrightarrow \langle x|x\rangle_B>0 \ \forall x\neq 0 \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} x_i b_{ij} x_j>0 \quad \forall x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i (-1)^{i+j} a_{ij} x_j > 0 \quad \forall x\neq 0 \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^i x_i \cdot a_{ij} \cdot (-1)^j x_j > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$\Leftrightarrow \langle \tilde{x} | \tilde{x} \rangle_A > 0$ dove $(\tilde{x})_i = (-1)^i x_i$ $\forall x \neq 0$ $f(x) = \tilde{x}$

$\Leftrightarrow \langle f(x) | f(x) \rangle_A > 0$ $\forall x \neq 0$ ora f è bigettiva $f = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \langle x | x \rangle_A > 0$ $\forall x \neq 0$.

Fisso V sp. vett. su $\mathbb{R}$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Norma associata: $\| x \| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$.

Oss: $\underbrace{\langle v+w | v+w \rangle}_{\| v+w \|^2} = \langle v+w | v \rangle + \langle v+w | w \rangle = \underbrace{\langle v | v \rangle}_{\|v\|^2} + \underbrace{\langle w | v \rangle + \langle v | w \rangle}_{2\langle v | w \rangle} + \underbrace{\langle w | w \rangle}_{\|w\|^2}$

$\Longrightarrow \langle v | w \rangle = \frac{1}{2} \left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 \right)$

(Sarà falso su $\mathbb{C}$.)

Proprietà: 1. $\|v\| > 0 \quad \forall v \neq 0$, $\|0\| = 0$

2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ $\qquad \|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v | \lambda v\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \cdot \langle v|v\rangle} = |\lambda| \cdot \|v\|$

3. $|\langle v|w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ $\qquad$ disug. di Cauchy-Schwarz

e l'uguaglianza vale solo se v, w sono lin. dip.

Infatti: lin. dip. $w = k \cdot v$ $\qquad |\langle v|w\rangle| = |\langle v|kv\rangle| = |k \cdot \|v\|^2| = |k| \cdot \|v\|^2$

$\|v\| \cdot \|w\| = \|v\| \cdot \|kv\| = |k| \cdot \|v\|^2$ ✓

lin. indip. : $tv + w \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \|tv + w\|^2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \|v\|^2 \cdot t^2 + 2\langle v|w\rangle \cdot t + \|w\|^2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \Delta/4 < 0 \Rightarrow \langle v|w\rangle^2 - \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 < 0 \Rightarrow |\langle v|w\rangle| < \|v\| \cdot \|w\|$. ✓

Conseguenza : $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ $\qquad$ uguaglianza vale solo se v, w sono multiplo non neg. uno dell'altro

disug. triangolare

$w = t \cdot v$ $\qquad \|v + w\| = \|v + tv\| = |1+t| \cdot \|v\|$ $\qquad t \geq 0$ sono uguali

$\|v\| + \|w\| = (1 + |t|) \cdot \|v\|$ $\qquad t < 0, v \neq 0 \quad |1+t| < 1 + |t|$

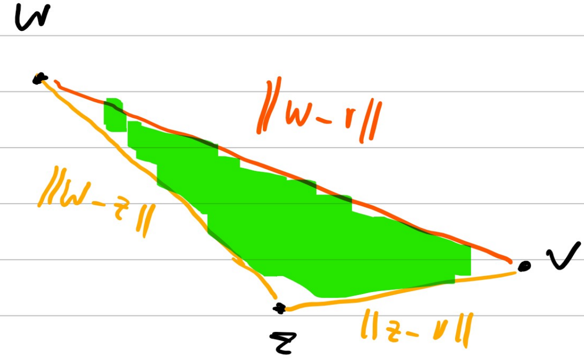
lin. indip

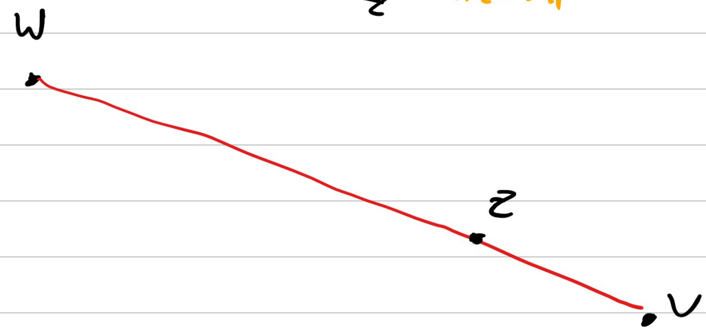
$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v|w\rangle + \|w\|^2 \le \|v\|^2 + 2|\langle v|w\rangle| + \|w\|^2$$
$$< \|v\|^2 + 2\|v\|\cdot\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2 .$$

✓

<u>Cor</u>: dati v, w, z $\quad \|w-v\| \le \|w-z\| + \|z-v\|$

(inoltre uguaglianza vale se e solo se $z = tv + (1-t)w \quad t \in [0,1]$)





$$\|w-v\| = \|(w-z)+(z-v)\|$$
$$\le \|w-z\| + \|z-v\|$$

<u>Esercizio</u>: discutere caso uguaglianza.

Sia V su $\mathbb{R}$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle$:

- v è <u>unitario</u> se $\|v\| = 1$
- v ortog. a w, $v \perp w$ se $\langle v | w \rangle = 0$

<u>Prop</u>: se $v_1, \dots, v_k \in V$ sono $\perp$ tra loro a coppie e $\neq 0$ allora sono lin. indip.

<u>Dim</u>: siano $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$. Allora

$$\langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \mid v_j \rangle = \langle 0 \mid v_j \rangle = 0$$

$$\| $$

$$\alpha_1 \underbrace{\langle v_1 | v_j \rangle}_{0} + \dots + \alpha_j \underbrace{\langle v_j | v_j \rangle}_{\|v_j\|^2} + \dots + \alpha_k \underbrace{\langle v_k | v_j \rangle}$$

$$\Rightarrow \alpha_j \cdot \|v_j\|^2 = 0 \implies \alpha_j = 0 \qquad \forall j. \qquad \blacksquare$$

Prop: se $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$ è una base ortogonale di V allora $\forall v\in V$ ho

$$v=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle v|v_i\rangle}{\|v_i\|^2}\cdot v_i .$$

Cioè $$\left([v]_{\mathcal{B}}\right)_i=\frac{\langle v|v_i\rangle}{\|v_i\|^2}.$$

Oss: (1) le coord. rispetto a $\mathcal{B}$ si calcolano senza risolvere sistemi

(2) la coord i-esima di v dipende solo dal vettore i-esimo di $\mathcal{B}$.

Dimo (Prop): affermo che se $w\in V$ e $\langle w|v_j\rangle=0$ $\forall j=1,\dots,n$ allora $w=0$.

Infatti: $v_1,\dots,v_n$ è base $\Rightarrow w=\beta_1v_1+\dots+\beta_nv_n$

$$\Rightarrow 0=\langle w|v_j\rangle=\beta_1\underbrace{\langle v_1|v_j\rangle}_{0}+\dots+\beta_n\underbrace{\langle v_n|v_j\rangle}_{0}\Rightarrow \beta_j=0\quad\forall j\Rightarrow w=0.$$

$\beta_j\cdot\|v_j\|^2$

Conclusione: devo vedere che $$w=v-\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle v|v_i\rangle}{\|v_i\|^2}\cdot v_i$$ è nullo:

Basta vedere $\langle w | v_j \rangle = 0 \quad \forall j$:

$$\left\langle v - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i \;\middle|\; v_j \right\rangle$$

$$= \langle v | v_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot \underbrace{\langle v_i | v_j \rangle}$$

sempre nullo tranne quando $i = j$
e in tal caso è $\|v_j\|^2$

$$= \cancel{\langle v | v_j \rangle} - \frac{\cancel{\langle v | v_j \rangle}}{\cancel{\|v_j\|^2}} \cdot \cancel{\|v_j\|^2} = 0 .$$