8/3/2018 Esercitazione.

$\mathbb{R}^n$, $A \in M(n, \mathbb{R})$

forma bilineare definita da A:

$x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x | y \rangle_A = {}^t x A y$

- la forma definita da A è simmetrica $\Leftrightarrow$ ${}^t A = A$

Es: 9.1.6

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad {}^tA = A$

è def > 0? cioè, è vero che ${}^tv A v > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$?

Osservo che gli el. sulla diagonale di A sono > 0.

$v \in \mathbb{R}^2$, $\quad v = (x, y)$

$${}^tv A v = 2x^2 + 4y^2 + 6xy = 2(x^2 + 2y^2 + 3xy)$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = \left(x^2 + 3xy + \frac{9}{4}y^2\right) - \frac{9}{4}y^2 + 2y^2 =$$

$$= \left(x + \frac{3}{2} y\right)^2 - \frac{1}{4} y^2$$

la forma non è definita > 0 !

Se $v = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ $\quad {}^t v A v = -\frac{1}{4} \cdot 1 = -\frac{1}{4} < 0$

(c) $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad {}^t A = A$

$v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$${}^t v A v = 2x^2 + 5y^2 + 6xy = 2\left(x^2 + \frac{5}{2} y^2 + 3xy\right) =$$

$$= 2\left[\left(x^2 + 3xy + \frac{9}{4}y^2\right) - \frac{9}{4}y^2 + \frac{5}{2}y^2\right] =$$

$$= 2\left[\left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{1}{4}y^2\right] \geq 0 \qquad \forall (x,y).$$

$$^t v A v = 0 \iff \begin{cases} x + \frac{3}{2}y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff x = y = 0$$

$\Rightarrow A$ definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$

(j) $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R})$

per quali (a, b, c) A definisce un prodotto scalare?

$^tA = A$ ✓ $\qquad v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$^tv A v = a x^2 + c y^2 + 2 b x y$$

Se ho un prodotto scalare deve essere $a > 0$

Se $w = (x, 0)$ $\qquad {}^tw A w = a x^2 \geq 0$ e $= 0$
solo se $x = 0$
cioè se $w = (0, 0)$

Se $y \neq 0$:

$$a x^2 + 2 b x y + c y^2 = y^2 \left(a \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2 b \frac{x}{y} + c \right)$$

$\cdot \quad \cdots \geq 0 \iff a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2b\frac{x}{y} + c \geq 0$

$\frac{x}{y} = t$

Per quali $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$ vale $at^2 + 2bt + c > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$?

$$\iff \underbrace{b^2 - ac}_{= -\det A} < 0 \iff \det A > 0$$

Conclusione: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ definisce un prodotto scalare

$\iff \quad a > 0, \quad \det A > 0$

$\longmapsto$

(y)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{\pi} & -1 \\ -\sqrt{\pi} & -\sqrt[3]{17} & 2 \\ -1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

${}^t A = A$ ✓

${}^t e_2 A e_2$

$\Rightarrow$ NON ho un prodotto scalare.

$\longmapsto$

(i)

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 2-k & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix}$$

$k \in \mathbb{R}$

${}^t A = A$

per quali k A dà un prodotto scalare?

$v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$${}^t v A v = k x^2 + (2-k) y^2 + k^2 z^2$$

In generale, se A è diagonale, definisce un prodotto scalare $\Longleftrightarrow$ gli el. sulla diagonale sono tutti $\boxed{> 0}$

In questo caso:

$$\begin{cases} k > 0 \\ 2 - k > 0 \\ k^2 > 0 \end{cases}, \quad \text{cioè} \quad 0 < k < 2$$

Es: 9.1.8

(b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

${}^tA = A$

gli el. sulla diagonale sono > 0

Esamino la restrizione di A ai sottospazi di dim $= 2$ generati da vettori della base canonica.

$\langle e_1, e_2 \rangle$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ è un prodotto scalare

$\left(a > 0, \ \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 1 > 0 \right)$

$\langle e_1, e_3 \rangle$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ok.

$\langle e_2, e_3 \rangle = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad 5 > 0$, $\det = 14 > 0$

$\hookrightarrow$

$v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

${}^t v A v = x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 4xy - 2yz =$

$= (x^2 + 4xy + 4y^2) - 4y^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2yz =$

$= (x+2y)^2 + (y^2 - 2yz + z^2) + 3z^2 - z^2 =$

$= (x+2y)^2 + (y-z)^2 + 2z^2 \geq 0$

${}^t v A v = 0 \iff x + 2y = 0,\ y - z = 0,\ z = 0 \iff x = y = z = 0$

$\Rightarrow$ A definisce un prodotto scalare.

(g) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$ ${}^tA = A$

Osservo che gli el. sulla diagonale sono >0 e i det dei minori 2×2 simmetrici sono >0.

$v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$${}^t v A v = 5x^2 + 3y^2 + 11z^2 - 4xy - 6xz - 4yz =$$

$$= 5\left(x^2 - \frac{4}{5}xy + \frac{4}{25}y^2\right) - \frac{4}{5}y^2 + 3y^2 + 11z^2 - 6xz - 4yz = \dots$$