

Geometrie 7/3/18

1.1.1 (d) $V = \mathcal{A}(\{a, b\}, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} f(u, v) &= 2u(a) \cdot v(a) - 7u(a)v(b) \\ &\quad - 7u(b)v(a) + 25v(a) \cdot v(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &\leftrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u &\leftrightarrow \begin{pmatrix} u(a) \\ u(b) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &\leftrightarrow 2x_1y_1 - 7x_1y_2 - 7x_2y_1 + 25x_2y_2 \\ f &\leftrightarrow \langle \cdot | \cdot \rangle \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -7 & 25 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e' bil. simm.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 2x_1^2 - 14x_1x_2 + 25x_2^2 \\ &= \frac{1}{25}x_1^2 + \left(\frac{7}{5}x_1 - 5x_2\right)^2 \end{aligned}$$

sem. p. ≥ 0 ; nulls soln

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \frac{7}{5}x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases}$$

circ soln $x = 0$

1.1.3

$$C^0([0,1], \mathbb{R})$$

$$(f, g) = \int_0^1 f(t) \cdot g(t) dt$$

$$S(t) = \sin(2\pi t)$$

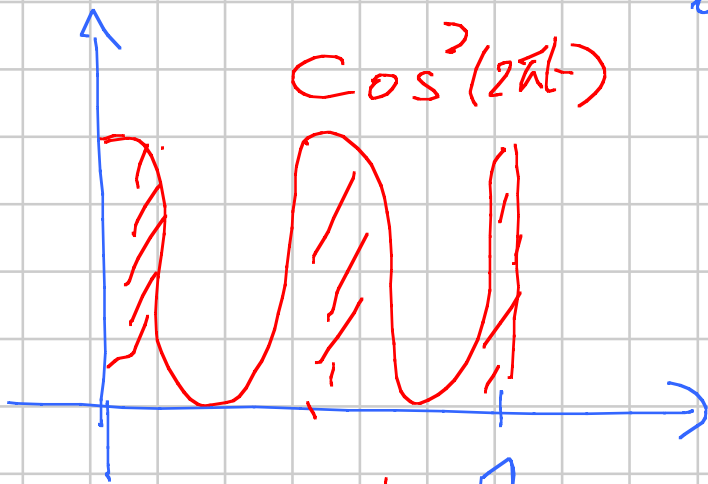
$$C(t) = \cos(2\pi t)$$

Provano che sono ortogonali
e hanno stessa norma

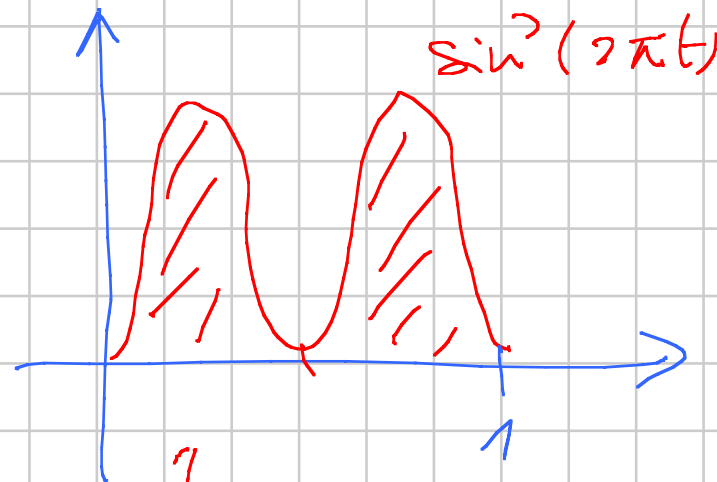
$$\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$$

$$\langle C | S \rangle = \int_0^1 \cos(2\pi t) \cdot \sin(2\pi t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \sin(4\pi t) dt = -\frac{1}{8\pi} \cos(4\pi t) \Big|_0^1 = 0$$



$$= 0 \quad \int_0^1 \cos^2(2\pi t) dt =$$



$$\int_0^1 \sin^2(2\pi t) dt$$

$$\int_0^1 \cos^2(\quad) + \int_0^1 \sin^2(\quad) = \int_0^1 1 = 1$$

$$\Rightarrow \|C\| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \|S\|.$$

1.14

$M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$

$$\langle A|B \rangle = \text{tr}({}^t B \cdot A)$$

Calcolare anche tra $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Il s'ensuit que $\cos \alpha < 1$



$$\cos(\alpha) = \frac{\langle v | w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Par conséquent :

$$\arccos \left(\frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{4 + 1 + 1 + 0 + 4 + 1} \cdot \sqrt{1 + 9 + 4 + 1 + 0 + 1}} \right)$$

1.1.5

Stabilità su f data è bil/sicure/def pos.

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$(b) f(x, y) = 7x_1y_2 + 8y_1y_2 - 5x_2y_1$$

non bilineare

$$(c) f(x, y) = -3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 8x_2y_1 + 7x_2y_2$$

bilineare

non sicura

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(7) \quad f(x, y) = 7x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 - 4x_2y_2$$

bil, simm

$$f(x, x) = 7x_1^2 - 6x_1x_2 - 4x_2^2$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow -4 \text{ non def. pos.}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

ha perche se qualche $a_{ii} \leq 0$ ho che

$\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ non i def. pos: $\langle e_i | e_i \rangle_A = a_{ii}$

$$(h) \quad f(x, y) = 3x_1 y_1 + 4x_1 y_2 + 4x_2 y_1 + 5x_2 y_2$$

bil, symm

$$f(x, x) = 3x_1^2 + 8x_1 x_2 + 5x_2^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\leadsto 0$

non def pos

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \leadsto \text{Mer.}$$

$$(j) \quad f(x, y) = 4x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + 5x_2 y_2$$

bil. sym.

$$f(x, x) = 4x_1^2 - 6x_1 x_2 + 5x_2^2$$

$$= \left(2x_1 - \frac{3}{2}x_2\right)^2 + \frac{11}{4}x_2^2 \quad \text{def. pos.}$$

Fissiamo fino a oggi V sp. vett. su $\mathbb{R}$ con $\langle \cdot, \cdot \rangle$
prod. scal.

Def: norma di $v \in V$, $\|v\| = \sqrt{\langle v|v \rangle}$

0ss: $\|v\| \geq 0$; nullo solo per $v=0$.

① SS : $\|v+w\|^2 = \langle v+w | v+w \rangle$
 $= \langle v | v+w \rangle + \langle w | v+w \rangle$

$$= \langle v|v \rangle + \langle v|w \rangle + \langle w|v \rangle + \langle w|w \rangle$$

$$= \|v\|^2 + 2\langle v|w \rangle + \|w\|^2$$

$$\Rightarrow \langle v|w \rangle = \frac{1}{2} (\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

dunque $\|\cdot\|$ determina il prod. scalare.

(Questo sarà falso nella versione $\mathbb{C}$.)

Oss: $\| \lambda \cdot v \| = |\lambda| \cdot \|v\|$ infatti:

$$\| \lambda \cdot v \| = \sqrt{\langle \lambda v | \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \cdot \langle v | v \rangle} = |\lambda| \cdot \sqrt{\langle v | v \rangle}.$$

Teo (disuguaglianza di Cauchy-Schwartz):

$$| \langle v | w \rangle | \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

e l'uguaglianza vale se e solo se v, w lin. dip.

Con: ha senso definire anche in V con $\langle \cdot | \cdot \rangle$



$$\alpha = \arccos \frac{\langle v | w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

il Teo dice
che è in $[-1, 1]$.

Dim: se sono lin. dip. ho $w = \lambda \cdot v$ (o $v = \lambda \cdot w$)

$$|\langle v | w \rangle| = |\langle \lambda v | v \rangle| = |\lambda \langle v | v \rangle| = |\lambda| \cdot \|v\|^2$$

$$\|v\| \cdot \|w\| = \|v\| \cdot \|\lambda v\| = \|v\| \cdot |\lambda| \cdot \|v\| = |\lambda| \cdot \|v\|^2 \quad \underline{OK}$$

Supponiamo v, w lin. indep. e verifichiamo
che $|\langle v|w \rangle| < \|v\| \cdot \|w\|$ - Notiamo che

$$tv + w \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \|tv + w\|^2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \langle tv + w | tv + w \rangle > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \|v\|^2 \cdot t^2 + 2 \langle v|w \rangle \cdot t + \|w\|^2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \Delta/4$ di tale polinomio $e^r < 0$

$$\Rightarrow \langle v|w \rangle^2 \rightarrow \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 < 0$$

$$\Rightarrow \langle v|w \rangle^2 < \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$$

$$\Rightarrow |\langle v|w \rangle| < \|v\| \cdot \|w\|.$$



Teo (disuguaglianza triangolare) :

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

e l'uguaglianza vale se e solo se uno è
multiplo non neg. dell'altro -

Dim: $v = \lambda \cdot w$ $\lambda \geq 0$

$$\|v + w\| = \|\lambda w + w\| = |1 + \lambda| \cdot \|w\| = (1 + \lambda) \cdot \|w\|$$

$$\|v\| + \|w\| = \|\lambda w\| + \|w\| = \lambda \cdot \|w\| + \|w\| = (1 + \lambda) \cdot \|w\|$$

$v = \lambda w$ $\lambda < 0, w \neq 0$

$$\Rightarrow \text{vale} = 0$$

$$\|v + w\| = |1 + \lambda| \cdot \|w\|$$

$$\|v+w\| = (1+|\alpha|) \cdot \|w\|$$

$$\text{ma } |1+\alpha| < 1+|\alpha| \quad \& \quad \|w\| \neq 0$$

$$\Rightarrow \|v\| < \text{stretto} -$$

Se lin. indep.:

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 &= \|v\|^2 + 2\langle v|w\rangle + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2|\langle v|w\rangle| + \|w\|^2 \\ &< \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 \end{aligned}$$

$$= (\|v\| + \|w\|)^2$$

$$\Rightarrow \|v+w\| < \|v\| + \|w\|.$$



Def. su V con $\langle \cdot | \cdot \rangle$ chiamiamo distanze associate a $\langle \cdot | \cdot \rangle$ la funzione $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ data da $d(v, w) = \|v - w\|$.

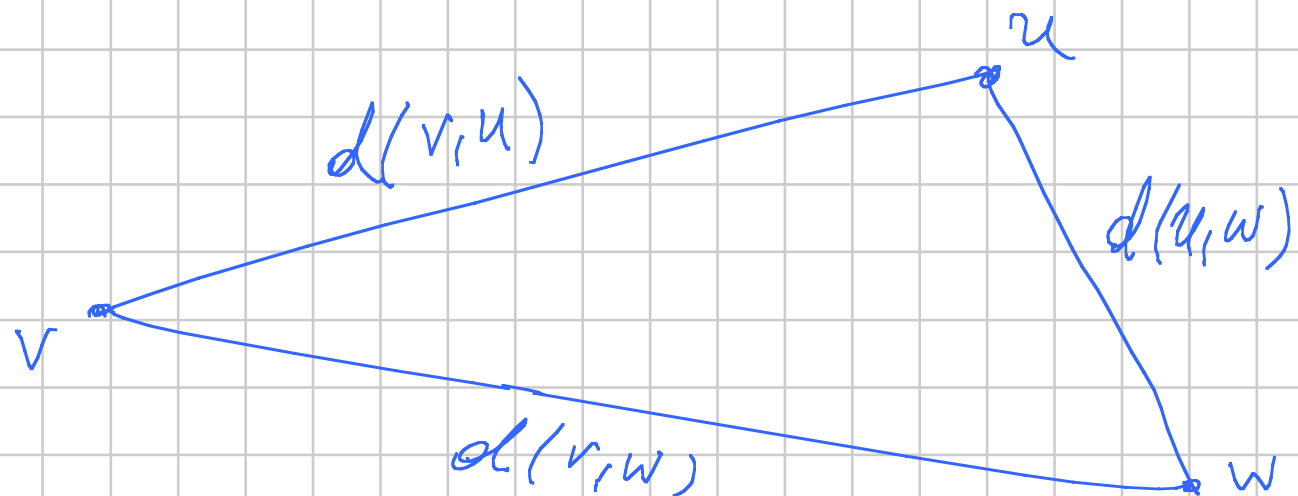
Proprietà:

(1) $d(v, w) \geq 0$, nulla solo se $v = w$

$$(2) \quad d(v, w) = d(w, v)$$

$$(3) \quad d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$$

(disuguaglianza triangolare)



In generale una funzione d su qualsiasi spazio X che soddisfa (1), (2), (3) è detta distanza su X .

Verifica della proprietà c :

$$(1) \quad d(v, w) = \|v - w\| \geq 0 \quad \text{nulla solo se} \\ v - w = 0 \quad \text{cioè} \quad v = w$$

$$(2) \quad d(w, v) = \|w - v\| = \|-(w - v)\| = \|v - w\| = d(v, w)$$

$$(3) \quad d(v, w) = \|v - w\| = \|v - u + u - w\| \\ \leq \|v - u\| + \|u - w\| = d(v, u) + d(u, w) -$$

————— o —————

Def: in V con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dico che $v, w \in V$
sono ortogonali (perpendicolari) e scrivo $v \perp w$

Se $\langle v | w \rangle = 0$.

Yufatti in tal caso

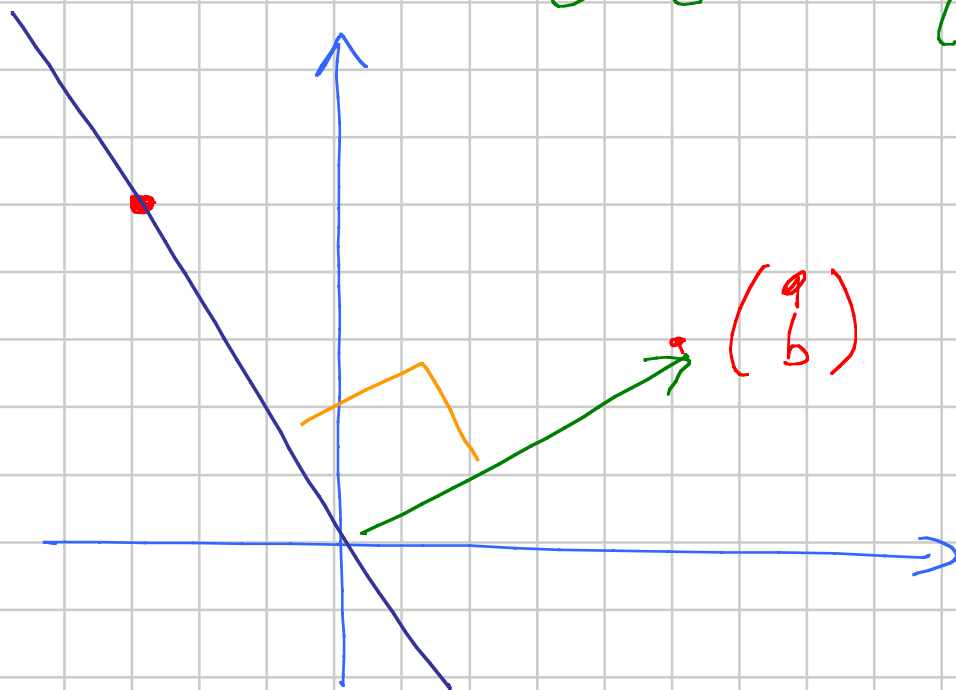


$$\cos \alpha = \frac{\langle v | w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = 0 \Rightarrow \alpha = \pi/2$$

In $\mathbb{R}^2$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ se } ax + by = 0$$

$$\text{cioè se } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$



Def : un sistema $v_1, \dots, v_m$ di vettori è detto ortogonale se $\langle v_i | v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$.

Prop : un sistema di vettori non nulli ortogonale è lin. indep.

Dim : se $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$ ho
 $\langle 0 | v_i \rangle = 0 \quad \forall i$

$$\Rightarrow \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m | v_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \underbrace{\alpha_1 \langle v_1 | v_i \rangle}_0 + \dots + \underbrace{\alpha_i \langle v_i | v_i \rangle}_{\|v_i\|^2} + \dots + \underbrace{\alpha_m \langle v_m | v_i \rangle}_0 = 0 \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \underbrace{\alpha_i \cdot \|v_i\|^2}_{\neq 0} = 0 \quad \forall i$$

$\neq 0$ puisque $v_i \neq 0$

$$\Rightarrow \alpha_i = 0.$$



Teo: se $v_1, \dots, v_m$ è una base ortogonale di V

$$v = \sum_{j=1}^m \underbrace{\frac{\langle v | v_j \rangle}{\|v_j\|^2}} \cdot v_j$$

↖ la j -esima coordinata
di v rispetto alla base
 $v_1, \dots, v_m$

Conseguenze:

- calcolare le coordinate rispetto a base ortogonale è facile
- la j -esima coord dipende solo da v_j
(nel caso di basi quadratiche, se
cambio un solo vettore cambiano
della base)

tutte le coordinate)

Esempio : $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 19 \end{pmatrix}$

affermo che sono base ortog. di $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{B}$

$$10 - 6 - 4 = 0$$

$$20 - 39 + 19 = 0$$

$$50 + 26 - 76 = 0$$

} sono ortog.;
sono $\neq 0$

$\Rightarrow$ sono lin. indep.

$$\left[\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} (14 - 3 - 4) / (4 + 9 + 1) \\ (35 + 2 + 16) / (25 + 4 + 16) \\ (70 + 13 - 76) / (100 + 169 + 37) \end{pmatrix}$$

Se uso invece $\mathcal{B}' = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} (14 - 3 - 4) / (4 + 9 + 1) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Yukawa:

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[\cdot]_B$$

e

$$[\cdot]_{B'}$$

now divide _