

Geometria 6/3/18

Giovedì 8 - solo II ore (9:30)

V sp. vet. su $\mathbb{R}$; una $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ è

- bilineare se $\langle a + b | c \rangle = \langle a | c \rangle + \langle b | c \rangle$ e $\langle a | b + c \rangle = \langle a | b \rangle + \langle a | c \rangle$
- simmetrica se $\langle v | w \rangle = \langle w | v \rangle$
- def. pos. se $\langle v | v \rangle > 0 \quad \forall v \neq 0$

- prod. scal. sc bil. symm. def. pos.

Es: $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ standard

$$\langle x | y \rangle_{\mathbb{R}^n} = {}^t x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Es: $V = M_{m \times m}(\mathbb{R})$

$$\langle A | B \rangle = \text{tr}({}^t A \cdot B)$$

- bil:
 - Transp e' lineare
 - prodotto righe $\times$ col e' bilineare
 - tracce e' lineare

✓

- simmetrico : ovvio che $\text{tr}({}^t M) = \text{tr}(M)$;

inoltre

$${}^t(M \cdot N) = {}^t N \cdot {}^t M$$

$\underbrace{\quad \quad}_{a \times b \quad b \times a}$
 $\underbrace{\quad \quad}_{a \times b \quad b \times a}$

$\underbrace{\quad \quad}_{a \times a}$
 $\underbrace{\quad \quad}_{a \times a}$

$\underbrace{\quad \quad}_{a \times a}$

$$\begin{aligned}
 ({}^t(M \cdot N))_{ij} &= (M \cdot N)_{ji} = \sum_{k=1}^b (M)_{jk} (N)_{ki} \\
 &= \sum_{k=1}^b (N)_{ki} (M)_{jk} = \sum_{k=1}^b ({}^tN)_{ik} \cdot ({}^tM)_{kj} \\
 &= (({}^tN) \cdot ({}^tM))_{ij}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle B|A \rangle &= \text{tr}({}^tB \cdot A) = \text{tr}({}^t({}^tB \cdot A)) \\
 &= \text{tr}({}^tA \cdot B) = \langle A|B \rangle
 \end{aligned}$$

- def. pos.

$$\langle A | A \rangle = \text{tr}({}^t A \cdot A) = \sum_{i=1}^m ({}^t A \cdot A)_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m ({}^t A)_{ij} \cdot (A)_{ji}$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (A)_{ji}^2 = \text{la somme des carrés de tous les coeff. de } A.$$

$\Rightarrow$ e' pos. e vero che $A=0$.

QSS: si identifico $M_{m \times n}$ con $\mathbb{R}^{m \cdot n}$

$$\left(M_{3 \times 2} \longleftrightarrow \mathbb{R}^6 \right)$$
$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \right)$$

ho che $\langle A/B \rangle = \text{tr}(A \cdot B)$ non è altro
che $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{m \cdot n}}$.

Es: $V = C^0([0,1], \mathbb{R})$

$$\langle x | y \rangle = \int_0^1 x(t) \cdot y(t) dt$$

$$x(t) = t \quad y(t) = \sin(t)$$

$$\begin{aligned} \langle x | y \rangle &= \int_0^1 t \cdot \sin(t) dt = t \cdot (-\cos t) \Big|_0^1 - \int_0^1 (-\cos t) dt \\ &= -\cos(1) + \sin(t) \Big|_0^1 = \sin(1) - \cos(1) \end{aligned}$$

E' prod. scal.:

- bilinear

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 | y \rangle = \int_0^1 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(t) \cdot y(t) dt$$

$$= \int_0^1 (\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)) \cdot y(t) dt$$

$$= \int_0^1 (\alpha_1 x_1(t) y(t) + \alpha_2 x_2(t) y(t)) dt$$

$$= \alpha_1 \int_0^1 x_1(t) y(t) dt + \alpha_2 \int_0^1 x_2(t) y(t) dt$$

$$= \alpha_1 \langle x_1 | y \rangle + \alpha_2 \langle x_2 | y \rangle$$

(a dot product again)

— similar.

$$\langle y | x \rangle = \int_0^1 y(t) \cdot x(t) dt$$

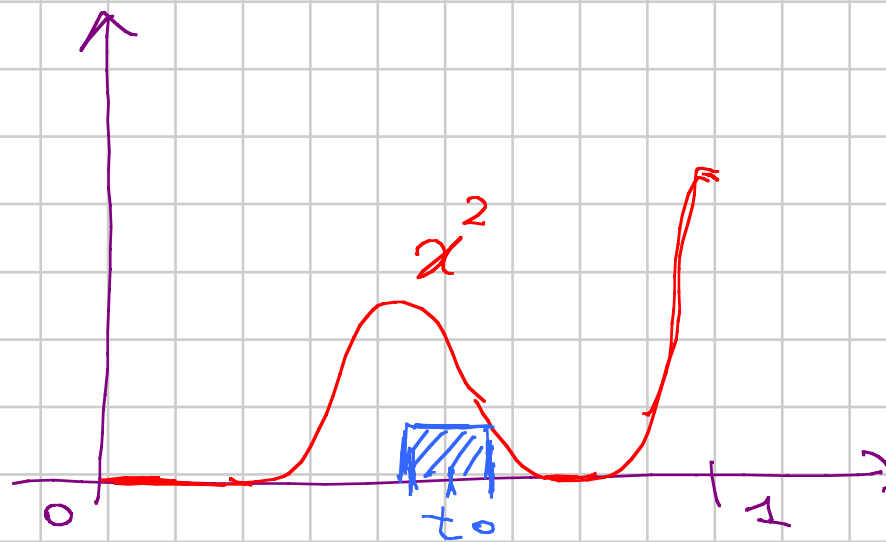
$$= \int_0^1 x(t) \cdot y(t) dt = \langle x | y \rangle.$$

- def pos.: data $x \in C^0([0,1], \mathbb{R})$, $x \neq 0$
devo provare che $\langle x|x \rangle > 0$.

$x \neq 0$ significa che $\exists t_0$ con $x(t_0) \neq 0$.

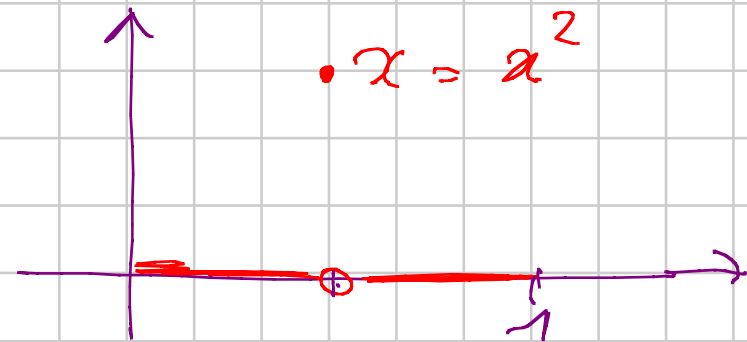
$$\langle x|x \rangle = \int_0^1 x(t)^2 dt$$

area ()



Qss: se prendo $V = \{ \text{le funz. integrabili su } [0,1] \}$
è falso che $\langle x|y \rangle = \int_0^1 x(t) \cdot y(t) dt$
sia def. pos.

Es: $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \neq 1/2 \\ 1 & \text{per } t = 1/2 \end{cases}$



$x \neq 0$ ma $\langle x|x \rangle = \int_0^1 x^2(t) dt = 0$

Def: data $A \in M_{m \times m}$ chiamo applicazione
bilineare associata ad A le

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle x | y \rangle_A = {}^t x \cdot A \cdot y$$

$$\begin{array}{c} 1 \times m \quad m \times m \quad m \times 1 \\ \quad \nearrow \quad \nearrow \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ 1 \times 1 \end{array}$$

$$\sum_1^8 s: \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 5 \\ e \end{pmatrix} \right\rangle_A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ e \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 + 7e \\ -10 + \pi e \end{pmatrix}$$

$$= 40 + 14e + 10 - \pi e = 50 + 14e - \pi e$$

Prop: le appl. bilineari su $\mathbb{R}^n$ sono tutte e
sole quelle del tipo $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ con $A \in M_{n \times n}$.

Dim: devo vedere:

- oggi $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è bilineare

- SX: $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 | y \rangle_A =$

$$= {}^t(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \cdot A \cdot y$$

$$= (\alpha_1 {}^t x_1 + \alpha_2 {}^t x_2) \cdot A \cdot y$$

$$= \alpha_1 {}^t x_1 A y + \alpha_2 {}^t x_2 A y = \alpha_1 \langle x_1 | y \rangle_A + \alpha_2 \langle x_2 | y \rangle_A$$

- $d_x : \langle x | \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle_A = \dots = \alpha_1 \langle x | y_1 \rangle_A + \alpha_2 \langle x | y_2 \rangle_A$

- ogni f bilineare su $\mathbb{R}^n$ è del tipo $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$

data f bilineare cerco A t.c. $f(x, y) = {}^t x \cdot A \cdot y$
 $\forall x, y.$

Ossevo che se tolo A esiste, poiché

$$a_{ij} = \underbrace{(0 \dots 0 \underset{i}{1} 0 \dots 0)}_{e_i} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \underset{j}{1} 0 \dots 0 \end{pmatrix}}_{e_j}$$

devo avere che $a_{ij} = f(e_i, e_j)$. Dunque
 definisco A ponendo $a_{ij} = f(e_i, e_j)$ e
 verifico che $f(x, y) = \langle x | y \rangle_A \quad \forall x, y :$

Gufatti: $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$

$$\Rightarrow f(x, y) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right)$$

$$\stackrel{=}{\text{lin } s_x} \sum_{i=1}^n x_i f(e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j)$$

$$\stackrel{=}{\text{lin } d_x} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j f(e_i, e_j)$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j}_{(A \cdot y)_i}$$

$$= {}^t x \cdot A \cdot y -$$



Es : $f(x, y) = 5x_1 y_1 - 2x_1 y_2 + 7x_2 y_1 + 19x_2 y_2$

e^c bilineare: (ogni addendo e^c di I_{prado} sia in x sia in y)

Dunque viene la matrice A :

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} \boxed{5} & \boxed{-2} \\ \boxed{7} & \boxed{19} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= 5x_1y_1 - 2x_1y_2 + 7x_2y_1 + 19x_2y_2$$

Prop: $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ e' simm. $\Leftrightarrow A$ e' simm.

Dim: $\Leftarrow$: supponiamo ${}^t A = A$; allora

$$\langle y | x \rangle_A = {}^t y \cdot A \cdot x = ({}^t y \cdot A \cdot x)$$

$$= {}^t x \cdot {}^t A \cdot y = {}^t x \cdot A \cdot y = \langle x | y \rangle_A \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$: supponiamo $\langle y | x \rangle_A = \langle x | y \rangle_A \quad \forall x, y$

Imponi $t_y \cdot A \cdot x = t_x \cdot A \cdot y \quad \forall x, y$

$$\parallel$$

$$t_x \cdot {}^t A \cdot y$$

$$t_x \cdot {}^t A \cdot y - t_x \cdot A \cdot y = 0 \quad \forall x, y$$

$$t_x \cdot ({}^t A - A) \cdot y = 0 \quad \forall x, y$$

Lo uso per $x = e_i, y = e_j$ e trovo

$$({}^t A - A)_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

$$(tA)_{ij} - (A)_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

$$(A)_{ji} = (A)_{ij} \quad \forall i, j$$

hence A is symmetric —



Q: date A symm. can decide $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$
 e^s def pos?

Es: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$ diagonale (simmm).

$$\begin{aligned} \langle x|x \rangle_A &= {}^t x \cdot A \cdot x = (x_1 \dots x_m) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_m x_m^2 \end{aligned}$$

e^c def pos. se e solo se $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_m > 0$.

Es: Supponiamo $M \in M_{m \times m}$ con $\det(M) \neq 0$.
Poi si può dire $A = {}^t M \cdot M$. Noto:

$${}^t A = {}^t ({}^t M \cdot M) = {}^t M \cdot M = A \quad \text{cioè } A \text{ è simmetrica}$$

$$\langle x | x \rangle_A = ({}^t x \cdot {}^t M) \cdot (M \cdot x)$$

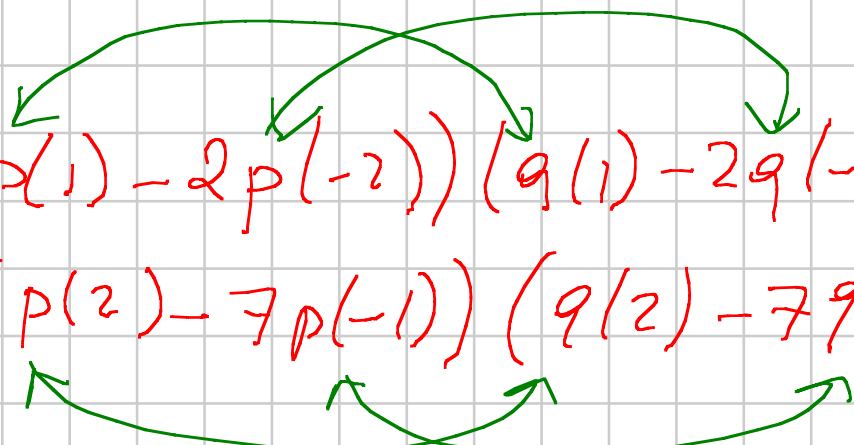
$$= {}^t (M \cdot x) \cdot (M \cdot x) = \langle M \cdot x | M \cdot x \rangle$$

è sempre ≥ 0 tranne se $M \cdot x = 0$ $\mathbb{R}^n$

ovvero e^c sempre > 0 tranne a $\lambda = 0$.
 $\Rightarrow e^c$ un prod. scal.

1.1.1 provare che la f data è prod. scal. su V .

(a) $V = \mathbb{R}_{\leq 1}[t]$

$$f(p(t), q(t)) = 5 (p(1) - 2p(-2))(q(1) - 2q(-2)) \\ + 3 (p(2) - 7p(-1))(q(2) - 7q(-1))$$


bilineare si può fissare $q(t)$ come funz.
di $p(t)$ e comb. lin. di rotazioni
in punti (e quelli sono lin); e ricavare

simmetrica $\bar{n}$

def. pos : $f(p(t), p(t)) =$
 $= 5(p(1) - 2p(-2))^2 + 3(p(2) - 7p(-1))^2$

ovvio che e^c sempre ≥ 0 ; $e^c = 0$ solo se

$$\begin{cases} p(1) - 2 \cdot p(-2) = 0 \\ p(2) - 7 \cdot p(-1) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

[Se V fosse $\mathbb{R}[t]$ preso $p(t) = (t^2 - 1)(t^2 - 4)$

ho $p(t) \neq 0$ e $f(p(t), p(t)) = 0$

$\Rightarrow$ non sarebbe def. pos.]

Per noi $p(t) = \alpha + \beta t$ dunque

$$(X) \begin{cases} \alpha + \beta - 2(\alpha - 2\beta) = 0 \\ \alpha + 2\beta - 7(\alpha - \beta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\alpha + 5\beta = 0 \\ -6\alpha + 9\beta = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$ quindi l'unico $p(t) \in \tilde{V}$
che ha $f(p(t), p(t)) = 0$ è 0 —

Ho verificato che f è def. pos.

$$(b) \quad V = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

$$f(x, y) = -x_2 y_1 - 2x_3 y_1 - 3x_1 y_1 \\ - 3x_1 y_3 + 5x_1 y_2 + 5x_3 y_2$$

[Se avessi $V = \mathbb{R}^3$ non sarebbe simm.

però associato alla matrice $(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} -3 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$]

Su V invece ho $x_2 = x_1 + x_3$ dunque

$$\begin{aligned} f(x, y) &= - (x_1 + x_3) y_1 - 2 x_3 y_1 - 3 x_1 y_1 \\ &\quad - 3 x_1 y_3 + 5 x_1 (y_1 + y_3) + 5 x_3 (y_1 + y_3) \\ &= (-1 - 3 + 5) x_1 y_1 + (-3 + 5) x_1 y_3 + (-1 - 2 + 5) x_3 y_1 + (+5) x_3 y_3 \\ &= x_1 y_1 + 2 x_1 y_3 + 2 x_3 y_1 + 5 x_3 y_3 \end{aligned}$$

e' simm.

def. pos.: $f(x, x) = x_1^2 + 4x_1x_3 + 5x_3^2$
 $= (x_1 + 2x_3)^2 + x_3^2$

ovvio che e^c segue ≥ 0 ; nulla se

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

cioè se $x_1 = x_3 = 0$

cioè solo per $x = 0$ ✓