

Esercizio

W s. spazio di $\mathbb{R}^4$

$$W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

a) Determinare $\dim W$

b) determinare eq cartesiane per W

c) Trovare due vettori v_1, v_2 t.c.

$$\underline{\text{Span}(v_1, v_2)} + \underline{W} = \mathbb{R}^4$$

RICORDIAMO COSA FARE per le eq cartesiane.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & x_1 \\ -2 & -1 & -1 & x_2 \\ 3 & 2 & -1 & x_3 \\ 4 & 3 & -3 & x_4 \end{pmatrix}$$

devo capire quando l'aggiunta di $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ non fa aumentare il rango

Facciamo mosse di colonne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -5 & x_2 + 2x_1 \\ 3 & -1 & 5 & x_3 - 3x_1 \\ 4 & -1 & 5 & x_4 - 4x_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & x_3 - 3x_1 + x_2 + 2x_1 \\ 4 & -1 & 0 & x_4 - 4x_1 + x_2 + 2x_1 \end{pmatrix}$$

$$(*) \begin{cases} x_3 - x_1 + x_2 = 0 \\ x_4 - 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Prima c.v. $W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$

$= \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ allora poiché
questi due vettori sono lin. INDIP,

$$\dim W = 2$$

Inoltre il sistema $(*)$ dà le equazioni caratteristiche di W perché il rango della matrice

$$\bar{z} \left(\begin{matrix} \text{ovvia} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \right) \in W \text{ se e solo se}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ è soluzione di } (*).$$

$$c) \text{ Quindi } W = \text{span} \left(\begin{matrix} w_1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \right), \begin{pmatrix} w_2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Rango } v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nota che w_1, w_2, v_1, v_2 è una base di $\mathbb{R}^4$ (non lin INDIP, come si

nessi vettore perché sono a scalari).

Allora

$$\text{Span}(v_1, v_2) + W = \mathbb{R}^4$$

come richiesto.

5 Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare la cui matrice rispetto alle basi $\mathcal{E}_4$

$$[f]_{\mathcal{E}_4}^{\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Det una base di $\text{Ker } f$
- det una base di $\text{Im } f$
- det $\dim \text{Im } f \cap \text{Ker } f$

Soluzione

a) Per trovare $\text{Ker } f$ risolvo il sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Faccio mosse di R1GA e trovo un sistema equivalente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Ker } f$ è dunque dato dai vettori

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ che risolvono il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Per Rouché Capelli so che $\dim \ker f = 2$
allora basta che mostri due vettori
lin INDIP in $\ker f$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

questi due vettori sono una base di
 $\text{Ker } f$.

b) Per il teo della dimensione.

$$\text{so che } \dim \text{Im } f = 2 \quad (= 4 - 2)$$

Basta allora scegliere nella matrice
insieme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

due colonne lin INDIP.

per esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ è base di } \text{Im } f.$$

c) Per Grassmann

$$\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f - \dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f)$$

$$= 2 + 2 - \dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f)$$

Basta dunque calcolare $\dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f)$

che è = rango della matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{base di Ker } f} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{base di Im } f}$

Facendo mosse di colonna.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ ovunque}$$

il rango è 3.

Allora

$$\dim \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = 1$$

(Non richiesto: una base è data da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$$

Esercizio Sia $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione

lineare.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(è la proiezione sul piano $x_y z_{||}$)

Sia β la base di $\mathbb{R}^3$ data dai 3 vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_3$$

a) Determinare le coordinate di $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a β .

b) Det la matrice.

$$\begin{bmatrix} \overline{\quad} \\ 11 \end{bmatrix}_{\beta}^{\beta}$$

Soluzione.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il sistema ha l'unica soluzione.

$$a = -1 \quad b = 1 \quad c = 0$$

La risposta è

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left[\Pi \right]_{\beta}^{\beta} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Pi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x=-1} \quad \Pi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Pi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Infatti

$$\Pi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -v_3$$

omnia

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\pi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

risolvendo si trovano $a = -1, b = 1, c = -1$

$$\left[\pi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{\beta} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Si osserva infine che $\pi(v_3) = v_3$.

NOTA FINALE

$$\pi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \pi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\pi \right]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le due matrici

$$\begin{bmatrix} \overline{11} \end{bmatrix}_{E_3}^{E_3} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \overline{11} \end{bmatrix}_{\beta}^{\beta} \quad \text{hanno,}$$

come previsto, lo stesso rango