

Esercizio 8.5.2

Verificare che $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiene.

$$\text{a } V = \left\{ z \in \mathbb{C}^4 : (1-i)z_1 + (1-i)z_2 - 2z_3 + (1-i)z_4 = 0 \right\}$$

$\mathbb{C}^4$

$$V \subset \mathbb{C}^4$$

V ha dim 3

Per prima cosa verifichiamo che $v_1 \in V$

$$i \cdot 2 + (1-i)i - 2(1+i) + (1-i)(-1) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\cancel{2i} + \cancel{i} + 1 - 2 - \cancel{2i} - \cancel{i} + 1 \stackrel{?}{=} 0$$

Verificato.

$$i z_1 + (1-i) z_2 - 2 z_3 + (i-1) z_4 = 0$$

$$i z_1 = (i-1) z_2 + 2 z_3 + (1-i) z_4$$

$$z_1 = (1+i) z_2 - 2i z_3 + (-1-i) z_4$$

$\nearrow$
 moltiplico per $(-i)$ che $\tilde{e} = \frac{1}{i}$

Quindi hanno 3 vettori lin (ND)P in V

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -1-i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(sono una base di V).

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix}$$

Noi cerchiamo una base che contenga v_1 .

Procediamo per passi.

v_1, w_1 sono lin. i.v.p.
perché non sono uno multiple
dell'altro.

Ora aggiungiamo w_2

$$w_2 \stackrel{?}{=} 2v_1 + \beta w_1$$

$$\begin{pmatrix} -2i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} 2 \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da qui vedo che $2=0$

una volta posto $2=0$ da qui
vedo che $\beta \cdot 0 = 1$ ASSURDO.

Non c'è soluzione, dunque

W_2 non giace nello $\text{span}(v_1, w_1)$
e dunque

v_1, w_1, W_2 è base di V .

Esercizio 8.5.4. Trovare l'inversa

a)
$$\begin{pmatrix} 4 & -i \\ 1+i & 2-i \end{pmatrix}$$

RICORDO

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ l'inversa esiste se}$$

e solo se $ad - bc \neq 0$ ed è

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Calcolo il determinante

$$\begin{aligned} 4(z-i) + i(1+i) &= \\ = 8 - 4i + i - 1 &= 7 - 3i \end{aligned}$$

Quindi la risposta è

$$\frac{1}{7-3i} \begin{pmatrix} z-i & i \\ -1-i & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8.5.5

$$V = \{ z \in \mathbb{C}^3 : -2iz_1 + (1+i)z_2 + 3z_3 = 0 \}$$

$$W = \{ p(v) \in \mathbb{C}_{\leq 2}[v] : p(-i) = 0 \}$$

per Ruffini sono i polinomi

$p(v)$ della forma $(v+i)q(v)$

con $q(v) \in \mathbb{C}_{\leq 1}[\omega]$

$$\beta = \left(\begin{pmatrix} 6i \\ 3(1+3i) \\ -2(1+2i) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3(1-i) \\ -6 \\ 4(1+i) \end{pmatrix} \right)$$

Verifichiamo che β è base di V

Sono lin INDIP perchè non sono
una multiple dell'altra

Infatti

$$\frac{3(1-i)}{2 \neq i} \quad 3(1+3i) \stackrel{?}{=} -6$$

$$(1-i) \quad 3(1+3i) \stackrel{?}{=} -12i$$

↑
ha parte reale = 12

↑
ha parte
reale = 0

dunque NON sono MULTIPLI.

Va verificato che i due vettori appartengono a V . Se è vero, allora sono base di V (perché visto che V ha $\dim 2$)

Verifico

$$-2i \cdot 6i + (1+i) \cdot 3(1+3i) + 3(-2(1+2i)) \stackrel{?}{=} 0$$

$$12 + (-6 + 12i) - 6 - 12i \stackrel{?}{=} 0$$

Verificato.

FARE l'altra analogia verifica.

$$C = \left(\begin{array}{l} (2-i)u^2 + (2+i)u + (1+i), \\ 4(1-i)u^2 + (3+2i)u + (2-i) \end{array} \right)$$

Verifico che entrambi i polinomi sono in V

$$(2-i)(-i)^2 + (2+i)(-i) + 1+i \stackrel{?}{=} 0$$

$$i - 2 - 2i + 1 + 1 + i \stackrel{?}{=} 0$$

VERIFICATO

l'altra verifica è analoga.

I due polinomi sono in WDP perché non sono uno multiplo dell'altro.

Verifica come sopra:

$$(3+2i) \frac{(1+i)}{2-i} \stackrel{?}{=} 2+i$$

$$(3+2i)(1+i) \stackrel{?}{=} (2+i)(2-i)$$

$$\underbrace{(3-2) + 5i}_{= 1 + 5i} \neq \underbrace{2^2 - i^2}_{= 5}$$

Prendiamo ora

$$f: V \rightarrow W$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2(1+3i)z_1 + 4z_2 + 3(3-i)z_3 \\ 4(1-i)z_1 + 4iz_2 + 2(2+3i)z_3 \\ -2(3+i)z_1 + 4(1-i)z_2 + (3-11i)z_3 \end{pmatrix}$$

f è lineare perché ogni coefficiente è
funzione lineare di z_1, z_2, z_3

$$[f]_{\beta}^{\gamma} = \begin{pmatrix} f(1) & & \\ & f(i) & \\ & & f(i) \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 6i \\ 3(1+3i) \\ -2(1+2i) \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left[-2(1+3i)6i + 4 \cdot 3(1+3i) + 3(3-i)(-2-4i) \right] v^2 \\ + \left[4(1-i)6i + 4i \cdot 3(1+3i) + 2(2+3i)(-2-4i) \right] v \\ + \left[-2(3+i)6i + 4(1-i)3(1+3i) + (3-11i) \cdot (-2-4i) \right]$$

NOTA

se verificiamo che questo polinomio
ha $-i$ come radice allora sappiamo che
 $\in W$,

se verificiamo la stessa cosa anche per

$$f\left(\begin{pmatrix} 3(1-i) \\ -6 \\ 4(1+i) \end{pmatrix}\right)$$

allora, il mondo si apre davanti a noi

in W dunque manda V in W ,
continuare i calcoli.....

§ 8.5.7

a)

$$E \in \mathbb{C}^3 :$$

$$(1-4i)z_1 + (2+i)z_2 + (3i-2)z_3 = 4-5i$$

$$(1-4i) \cdot \frac{(1+4i)}{17} = 1$$

$$17 z_1 = -(2+i)(1+4i) z_2 - (3i-2)(1+4i) z_3$$

$$+ (4-5i)(1+4i)$$

$$17 z_1 = - (2 + i + 8i - 4) z_2 - (3i - 12 - 2 - 8i) z_3 + 4 + 16i - 5i + 20$$

$$17 z_1 = - (-2 + 9i) z_2 - (-14 - 5i) z_3 + (24 + 11i)$$

$$v_0 = \begin{pmatrix} \frac{24 + 11i}{17} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$$

Ora guardiamo l'eq omogenea associata.

Una base dello spazio delle sue soluzioni è

$$\begin{pmatrix} \frac{2 - 9i}{17} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{14 + 5i}{17} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

E en forma paramétrica

$$v_0 + t \begin{pmatrix} \frac{2-9i}{17} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{14+5i}{17} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$