

Algebra Lineare 11/12/19

$$\mathbb{C} = \{a+ib : a, b \in \mathbb{R}\} \quad a+i \cdot 0 = a \quad \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$
$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$$
$$(a+ib) \cdot (c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc) \quad (i^2 = -1)$$

$\mathbb{C}$ campo $\Rightarrow$ proprietà neutro 0, opposto, assoc, comm. +
neutro 1, inverso $\neq 0$, assoc., comm. $\cdot$
distrib.

$$(a+ib)^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

$$z = a+ib \quad \bar{z} = a-ib \quad |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$
$$z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

Forma polare o esponenziale di $z \in \mathbb{C}$:

$$z = |z| \cdot (\cos(\vartheta) + i \cdot \sin(\vartheta)) = |z| \cdot e^{i\vartheta}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{i\vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\vartheta)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\vartheta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\vartheta)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}}_{\cos(w)} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}}_{\sin(w)}$$

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

$$w = |w| \cdot e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow z \cdot w = |z \cdot w| \cdot e^{i(\varphi + \varphi)}$$

modulo si moltiplica

argumento si somma

$$z = a + ib$$

$$a = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

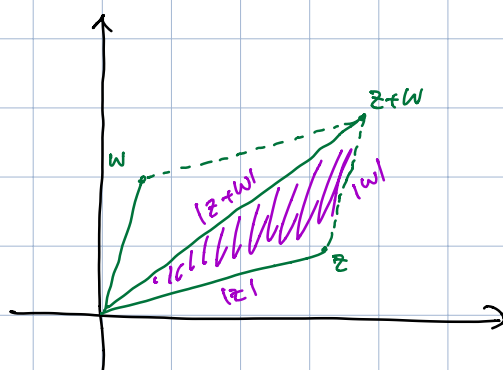
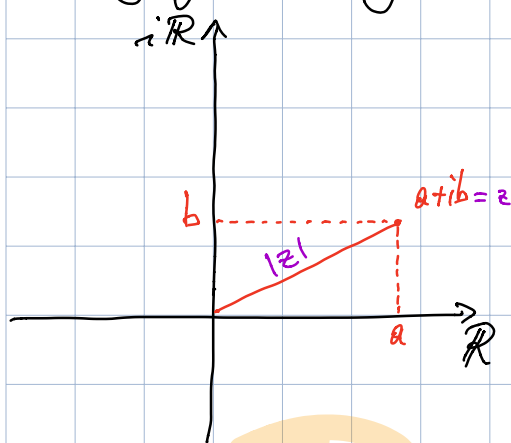
parte reale

$$b = \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

parte immaginaria

Facile: $|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$

Disuguaglianza triangolare: $|z + w| \leq |z| + |w|$



oppure: $|z + w|^2 = (z + w) \cdot \overline{(z + w)} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w})$

$$= z\bar{z} + z\bar{w} + \underbrace{\bar{z}w}_{= \overline{z\bar{w}}} + w\bar{w} = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$$

$$\leq |z|^2 + 2|z \cdot \bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z| \cdot |w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$$



Teo fond. algebra: ogni $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ con $\deg(p(z)) > 0$ ha radici.

Fatto: vale divisione tra polinomi:

dati $f(z), g(z) \in \mathbb{C}[z]$ con $\deg(g(z)) > 0$ esistono unici $q(z), r(z) \in \mathbb{C}[z]$ t.c.

$$f(z) = g(z) \cdot q(z) + r(z) \quad \deg(r(z)) < \deg(g(z))$$

↑dividendo
 ↑divisore
 ↑quoziente
 ↑resto

Teo di Ruffini: $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ ha la radice $z_0 \in \mathbb{C}$ se e solo se $\bar{z}$ è divisibile per $z - z_0$.

Dim: divido $p(z) = q(z) \cdot (z - z_0) + r(z) \quad \deg(r(z)) < \deg(z - z_0)$

$\parallel$
 1

$$\Rightarrow r(z) = r \in \mathbb{C}$$

$$p(z) = q(z) \cdot (z - z_0) + r \quad (*)$$

Se z ha radice z_0 : sostituisco z_0 in $(*)$

$$0 = p(z_0) = q(z_0) \cdot \underbrace{(z_0 - z_0)}_0 + r$$



$$\Rightarrow R=0$$

$$\Rightarrow p(z) = q(z) \cdot (z - z_0)$$

Se $p(z)$ è multiplo di $z - z_0$ ho $r=0 \Rightarrow p(z) = q(z) \cdot (z - z_0)$

Multiplicità di radice: se $p(z)$ ha radice z_0

$$p(z) = (z - z_0) \cdot p_1(z) \quad ; \quad p_1(z_0) \neq 0 \quad \begin{cases} \text{No: ui falso} \\ \text{Si: } p_1(z) = (z - z_0) \cdot p_2(z) \\ p(z) = (z - z_0)^2 \cdot p_2(z) \end{cases}$$

$$p_2(z_0) \neq 0 \quad \begin{cases} \text{No: ui falso} \\ \text{Si: } p_2(z) = (z - z_0) \cdot p_3(z) \Rightarrow p(z) = (z - z_0)^3 \cdot p_3(z) \end{cases}$$

$$\dots \quad p(z) = (z - z_0)^k \cdot p_k(z) \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \deg = n & \deg = k & \deg = n - k \end{matrix}$$

alle fine $p(z) = (z - z_0)^m \cdot p_m(z)$ $p_m(z_0) \neq 0$

chiamo $m = \text{multiplicità di } z_0 \text{ come radice di } p(z)$

cioè: la molt. di z_0 come radice di $p(z)$ è il massimo m tale che $p(z)$ è multiplo di $(z - z_0)^m$.

————— o —————

Oss: nelle def. di sp. rett. su $\mathbb{R}$ contano solo
 le proprietà di campo di $\mathbb{R}$
 $\Rightarrow$ stesse def. per sp. rett. su $\mathbb{C}$.

Uno sp. rett. su $\mathbb{C}$ è insieme V con due operazioni:

$$\begin{aligned} V \times V &\rightarrow V \\ (v_1, v_2) &\mapsto v_1 + v_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times V &\rightarrow V \\ (z, v) &\mapsto z \cdot v \end{aligned}$$

con le stesse proprietà.

Tutte le teorie si ripetono identiche su $\mathbb{C}$.

Es: $W = \{z \in \mathbb{C}^3 : \underbrace{2(1+i)z_1 - 7iz_2 + (5-3i)z_3}_{1 \text{ equaz. lin.}} = 0\}$

$\uparrow$
 sp. rett. su $\mathbb{C}$ di $\dim_{\mathbb{C}} = 3$

W è sottos. rett. di $\mathbb{C}^3$
 di $\dim_{\mathbb{C}} = 3 - 1 = 2$

Base: $\begin{pmatrix} 7i \\ 2(1+i) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5-3i \\ 7i \end{pmatrix}$

Es: provar de existe unica

$f: \{p(z) \in \mathbb{C}_{\leq 2}[z] : p(i)=0\} \rightarrow \mathbb{C}^2$ linear l.c.

$$f(1+iz) = \begin{pmatrix} 2+i \\ 5-3i \end{pmatrix} \quad f(1+z^2) = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+5i \end{pmatrix}.$$

Provar de f invertible e scalar

$$f(i+2z+3iz^2) = f^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{C}_{\leq 2}[z]$ sp. vet. su $\mathbb{C}$ com $\dim_{\mathbb{C}} = 3$

1 equaz. lin. $\Rightarrow$ dominio sp. vet. m $\mathbb{C}$ com $\dim_{\mathbb{C}} = 2$.

codominio $\mathbb{C}^2$, $\dim_{\mathbb{C}} = 2 \Rightarrow f$ può essere invertibile

$1+iz \in$ dominio

$$f(1+iz) \Big|_{z=i} = 1+i^2 = 1-1=0$$

$1+z^2 \in$ dominio

$$f(1+z^2) \Big|_{z=i} = 1+i^2 = 1-1=0$$

$1+iz, 1+z^2$ lin. indep $\Rightarrow$ sono base dominio

$\Rightarrow f$ esiste unica linear.

Invertibile: basta vedere surgettiva; so che

$\begin{pmatrix} 2+i \\ 5-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+5i \end{pmatrix}$ generano $\text{Im}(f)$; basta vedere che sono lin. indep. in $\mathbb{C}^2$

Basta vedere che $\det \begin{pmatrix} 2+i & 1-i \\ 5-3i & 2+5i \end{pmatrix} \neq 0$

$$\begin{aligned} & \underline{4} + \underline{10i} + \underline{2i} - \underline{5} - \underline{5} + \underline{5i} + \underline{3i} + \underline{3} \\ & = -3 + 18i \end{aligned}$$

OK

Calcolo $f(i+2z+3iz^2)$: ha senso solo se
 $i+2z+3iz^2 \in \text{dominio} : i+2z+3iz^2 \Big|_{z=i} = i+2i-3i=0$

Seppiamo $f(1+iz) = \begin{pmatrix} 2+i \\ 5-3i \end{pmatrix}$ $f(1+z^2) = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+5i \end{pmatrix}$

Scrivo $i+2z+3iz^2 = -2i(1+iz) + 3i(1+z^2)$
 $\Rightarrow f(i+2z+3iz^2) = -2i \begin{pmatrix} 2+i \\ 5-3i \end{pmatrix} + 3i \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+5i \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} -4i+4 & +3i+3 \\ -10i-6 & +6i-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-i \\ -21-4i \end{pmatrix}$

Calcolo $f^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$:

Seppiamo $f(1+iz) = \begin{pmatrix} 2+i \\ 5-3i \end{pmatrix}$ $f(1+z^2) = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+5i \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow f^{-1}\begin{pmatrix} 2+i \\ 5-3i \end{pmatrix} = 1+iz$ $f^{-1}\begin{pmatrix} 1-i \\ 2+5i \end{pmatrix} = 1+z^2$

Scrivo $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2+i \\ 5-3i \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+5i \end{pmatrix}$

cioè risolviamo $\begin{cases} (2+i)\alpha + (1-i)\beta = 1 \\ (5-3i)\alpha + (2+5i)\beta = i \end{cases}$

Cramer: $\alpha = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ i & 2+5i \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2+i & 1-i \\ 5-3i & 2+5i \end{pmatrix}} = \frac{2+5i-i-1}{-3+18i}$
 $= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1+4i}{1-6i} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(1+4i)(1+6i)}{1+36}$

$$= + \frac{1}{3.37} (+23 - 10i)$$

$\Phi = \dots$ conto analogo

$$f^{-1}\left(\frac{1}{i}\right) = \frac{1}{3.37} (23 - 10i) \cdot \begin{pmatrix} 2+i \\ 5-3i \end{pmatrix} + \underbrace{\dots}_{\neq} \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+5i \end{pmatrix}$$

————— 0 —————

Notiamo che $\mathbb{C}$ può essere identificato a $\mathbb{R}^2$.
 $\Rightarrow \mathbb{C}$ che è sp. vet. su $\mathbb{C}$ di $\dim_{\mathbb{C}} = 1$ è
 anche sp. vet. su $\mathbb{R}$ di $\dim_{\mathbb{R}} = 2$.

Analogaente:

$$\mathbb{C}^m \ni \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_m + iy_m \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_m \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}$$

è biperiosa naturale: $\mathbb{C}^m$ è sp. vet. su $\mathbb{C}$ con
 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^m) = m$ ma anche sp. vet. su $\mathbb{R}$ con
 $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^m) = 2m$.

Si prende uno sp. vet. V su $\mathbb{C}$ con $\dim_{\mathbb{C}}(V) = m$
 è anche sp. vet. su $\mathbb{R}$ e $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2m$; infatti
 se $v_1, \dots, v_m$ è base su $\mathbb{C}$ allora $v_1, iv_1, v_2, iv_2, \dots, v_m, iv_m$
 è base su $\mathbb{R}$:

$$\underbrace{(\alpha_1 + i\beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_m + i\beta_m)v_m}_{\text{comb. lin. a coeff. in } \mathbb{C} \text{ di } v_1, \dots, v_m} = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \beta_1 (iv_1) + \dots + \alpha_m v_m + \beta_m (iv_m)}_{\text{comb. lin. a coeff. in } \mathbb{R} \text{ di } v_1, iv_1, \dots, v_m, iv_m}$$

6.3.1 Calcolare inverse A^{-1}

(e) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -5 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 20 - 6 + 18 - 48 + 5 = -60 + 43 = -17$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{17} \begin{pmatrix} -13 & 4 & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

(f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 10 - 5 = -14$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{14} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & -5 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

6.3.2 Risolvere:

$$\boxed{b} \quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 26 \\ -3x + 2y + 7z = 17 \\ 4x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

Cramer! $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} = -4 + 3$
 -28
 -27
 -24
 $-42 = -122 \quad \Delta$

$$x = -\frac{1}{122} \det \begin{pmatrix} 26 & -1 & 3 \\ 17 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \dots$$

$$y = -\frac{1}{122} \det \begin{pmatrix} 2 & 26 & 3 \\ -3 & 17 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \dots$$

$$z = \dots$$

[6.3.4] Al variare di $t \in \mathbb{R}$ di quante sono le soluz. di:

$$\begin{cases} (1-t)x + 2y - 2z = 1 \\ (1+t)x + 3y + z = t \\ 7x + 12y + 2tz = -1. \end{cases}$$

So che la soluz. è unica se $\det(3 \times 3 \text{ incompleta}) \neq 0$:

$$\det \begin{pmatrix} 1-t & 2 & -2 \\ 1+t & 3 & 1 \\ 7 & 12 & 2t \end{pmatrix} = 6t - 6t^2 + 14$$

$$-24t \quad -24$$

$$-4t \quad -4t^2 + 42$$

$$+12t \quad -12$$

$$\begin{aligned}
 &= -10t^2 - 10t + 20 \\
 &= -10(t^2 + t - 2) \\
 &= -10(t+2)(t-1)
 \end{aligned}$$

Per $t \neq -2$ e $t \neq 1$ soluz. univ.

Per $t = -2$ e $t = 1$ ho rank $(3 \times 3 \text{ incompleta}) = 2$:

- o rank $(3 \times 4 \text{ completa}) = 2 \Rightarrow$ infinite soluz (step off. dim=1)
- o rank $(3 \times 4 \text{ completa}) = 3 \Rightarrow$ unique soluz.

$$t = -2: \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 7 & 12 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 7 & 12 & -1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} -9 \\ -28 \\ -12 \\ -21 \\ -2 \end{matrix} + 72$$

$$= -72 + 72 = 0$$

$\Rightarrow \infty$ soluz (dim=1)

$$t = 1: \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & 12 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 12 & -1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 14 \\ -21 \\ -24 \\ -4 \end{matrix} \neq 0$$

Nessuna soluzione

6.3.5 (c) Calcolare i det delle matrici di B in A.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \\ -3 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \dots$$

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 7 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \dots$$

6.3.6 Calcolare rank (A).

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} = 32 + 3 + 5 - 30 - 8 - 2 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = 24 + 21 + 5 - 30 - 6 - 14 = 0$$

rank = 2.

$$(d) \quad \begin{pmatrix} \text{III} & \text{II} & \text{I} & \text{IV} \\ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{matrix} -15 \\ -8 \\ -2 \end{matrix} + 25 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{matrix} = 0$$

$$\begin{aligned} 2a + b &= 3 \\ a + 2b &= 1 \\ a &= \frac{5}{3} \quad b = -\frac{1}{3} \\ 5 \cdot \frac{5}{3} - \frac{1}{3} &= 8 \quad \checkmark \\ 5 \cdot \frac{5}{3} - \frac{7}{3} &= 6 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} &= -2 \cdot \text{I} - 1 \cdot \text{III} \quad \checkmark \\ \text{IV} &= -3 \cdot \text{I} - 2 \cdot \text{III} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 8 & -5 & -1 \end{pmatrix} = -16 + 1 - 35 + 50 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 12 - 9 + 7 - 10 = 0 \quad \text{rank} = 2$$

(tutte le sottrazioni 3×3 sono $6 \cdot 6 = 36$).

Passare da equaz. per. a cart. o viceversa.

$$\boxed{7.14} \quad E: \begin{cases} 2x - 3y + 7z = 6 \\ -5x + y + 6z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = +5x - 6z + 2 \\ 2x - 15x + 18z - 6 + 7z = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} -13x + 25z = 12 \\ y = 5x - 6z + 2 \end{cases}$$

$$125 - 78 = 47$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 25 \\ 47 \\ 13 \end{pmatrix} \right)$$

direttamente: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -25 \\ -47 \\ -13 \end{pmatrix} \right)$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{7.16} \quad E: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -5 + 7t \\ z = 3 + 5t \end{cases} \quad E = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

$\dim = 1.$

$$\begin{cases} 7x + 2y = 18 \\ 5x + 2z = 26 \end{cases}$$

opure

$$\begin{cases} 7x + 2y = 18 \\ x + y - z = -4 \end{cases}$$

OK

7.1.8

$$E: 5x - 12y + 10z = 2$$

$$\subset \mathbb{R}^3$$

$$\dim = 3 - 1 = 2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$$

opure

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad \underline{\text{OK}}$$

$$E: 5x - 12y + 10z = 2 \quad \subset \mathbb{R}^4$$

$$\dim = 4 - 1 = 3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

7.1.10

$$E: \begin{cases} x = 4 - 3t + 2s \\ y = -5 + t + s \\ z = 1 + 4t + 5s \end{cases}$$

$$\subset \mathbb{R}^3$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

$$\dim = 2 \Rightarrow 3 - 2 = 1 \text{ equations.}$$

$$\text{A mano: } \begin{cases} s = y - 2t + 5 \\ x = 4 - 3t + 2y - 4t + 10 \\ z = 1 + 4t + 5y - 10t + 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7t = -x + 2y + 14 \\ 6t = -z + 5y + 26 \\ (s = y - 2t + 5) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 182 \\ 84 \end{matrix}$$

$$6(-x + 2y + 14) = 7(-z + 5y + 26)$$

$$\boxed{-6x + 7z - 23y = 98}$$

Con la recta: $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$

$$\boxed{6} \cdot x + \boxed{23} \cdot y + \boxed{-7} \cdot z = -98$$

$$24 - 115 - 7$$

Verifica: $-18 + 48 - 28 = 0 \checkmark$
 $12 + 23 - 35 = 0$