ES 6.2.5

$(4\ 1\ 5\ 2\ 3)$ qual è la segnatura?

$\downarrow$ $1 \longleftrightarrow 4$

$(1\ 4\ 5\ 2\ 3)$

$\downarrow$ $2 \longleftrightarrow 4$

$(1\ 2\ 5\ 4\ 3)$

$\downarrow$ $5 \longleftrightarrow 3$

$(1, 2, 3, 4, 5)$

la segnatura è -1

ES. 6.2.9

$(7\ 5\ 2\ 8\ 1\ 4\ 3\ 6)$

$\downarrow$

$(1\ 5\ 2\ 8\ 7\ 4\ 3\ 6)$

$\downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 8 & 7 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

ci sono stati 6 scambi; la segnatura è $+1$.

ES 6.2.13

$$\det\begin{pmatrix} -1+t & 2 & -3 \\ 1+2t & 5 & -1 \\ -2 & 2-3t & 5 \end{pmatrix} =$$

$$(t-1)\det\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2-3t & 5 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 1+2t & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} 1+2t & 5 \\ -2 & 2-3t \end{pmatrix} =$$

$$= (t-1)(25+2-3t) - 2(5+10t-2) - 3\left[(1+2t)(2-3t)+10\right] =$$

$$= (t-1)(27-3t) - 10 - 20t + 4 - 3\left[2+4t-3t-6t^2+10\right] =$$

$$= 27t - 27 - 3t^2 + 3t - 20t - 6$$

$$- 3\left[-6t^2 + t + 12\right] =$$

$$= 15t^2 + 7t - 69$$

ES 6.2.19 e 6.2.20

(Determinante di Vandermonde)

VANDERMONDE

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 16 & 9 & 25 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 4$

$\lambda_2 = 3$

$\lambda_3 = 5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

ESEMPI DI MATRICI DI VANDERMONDE

6.2.19

In generale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots 1 \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

MATRICE DI VANDERMONDE

il determinante è $\prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i)$

Per esempio

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 16 & 9 & 25 \end{pmatrix} =$$

$$= (3-4)(5-4)(5-3) = -2$$

Per prova,

Calcoliamolo in un altro modo.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 16 & 9 & 25 \end{pmatrix} =$$

$$\downarrow$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 4^2-5\cdot 4 & 3^2-5\cdot 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\downarrow$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4-5 & 3-5 & 0 \\ 4^2-5\cdot 4 & 3^2-5\cdot 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} 4-5 & 3-5 \\ 4(4-5) & 3(3-5) \end{pmatrix} =$$

$$= (4-5)(3-5)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)(-2)(3-4) = -2$$

Per capire meglio come funziona la dimostrazione in generale consideriamo il caso 4×4 :

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3-\lambda_1^2\lambda_4 & \lambda_2^3-\lambda_2^2\lambda_4 & \uparrow & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\lambda_3^3 - \lambda_3^2\lambda_4$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_4 & \lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_4 & \lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_4 & 0 \\ \lambda_1^2(\lambda_1-\lambda_4) & \lambda_2^2(\lambda_2-\lambda_4) & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3^2(\lambda_3-\lambda_4)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1-\lambda_4 & \lambda_2-\lambda_4 & \lambda_3-\lambda_4 & 0 \\ \lambda_1(\lambda_1-\lambda_4) & \lambda_2(\lambda_2-\lambda_4) & \lambda_3(\lambda_3-\lambda_4) & 0 \\ \lambda_1^2(\lambda_1-\lambda_4) & \lambda_2^2(\lambda_2-\lambda_4) & & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\lambda_3^2(\lambda_3-\lambda_4)$$

$$= -1 \det \begin{pmatrix} \lambda_1-\lambda_4 & \lambda_2-\lambda_4 & \lambda_3-\lambda_4 \\ \lambda_1(\lambda_1-\lambda_4) & \lambda_2(\lambda_2-\lambda_4) & \lambda_3(\lambda_3-\lambda_4) \\ \lambda_1^2(\lambda_1-\lambda_4) & \lambda_2^2(\lambda_2-\lambda_4) & \lambda_3^2(\lambda_3-\lambda_4) \end{pmatrix}$$

$$= (-1)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

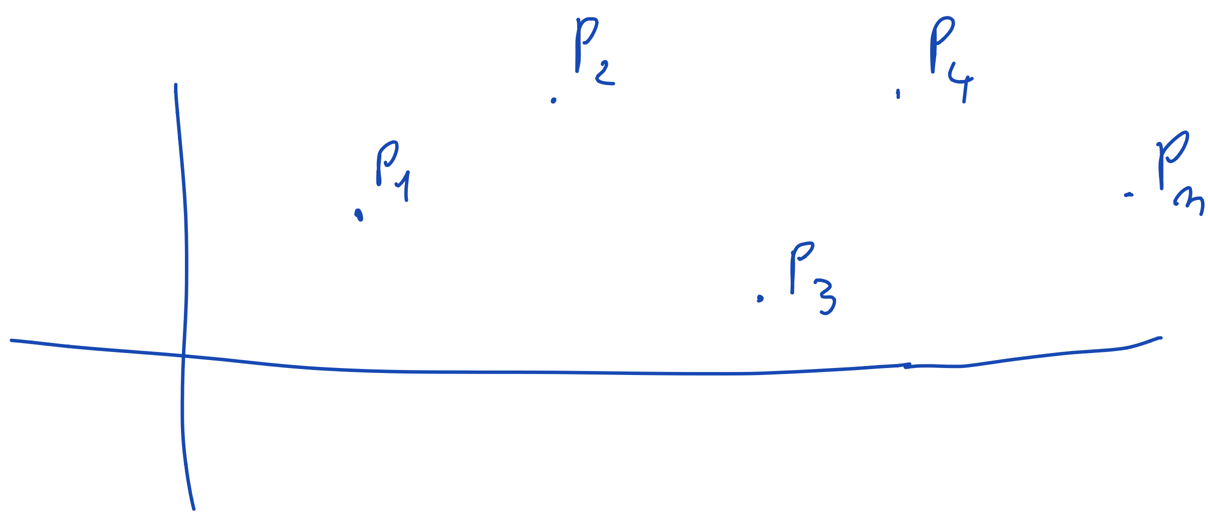
la dimostrazione formale dunque va impostata per induzione.

Per ipotesi induttiva quando faccio questo passaggio so che il det $^{3\times3}$ che mi resta da calcolare è $(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)$

quindi

$$= (\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)$$
$$(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)$$

6.2.20 Dati n punti $P_1, \ , P_n$ con ascisse distinte



esiste un polinomio $p(x)$ di grado $\leq n-1$ il cui grafico passa per $P_1, P_2, \ , P_n$?

$$p(x) = a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \quad + a_1 x + a_0$$

$$P_1 = (c_1, d_1)$$

$$P_2 = (c_2, d_2)$$

$$P_n = (c_n, d_n)$$

il grafico passa per P_1 se e solo se

$$\begin{cases} d_1 = a_{n-1} c_1^{n-1} + a_{n-2} c_1^{n-2} + \quad + a_1 c_1 + a_0 \\ \text{analogamente .} \\ \ldots \\ d_n = a_{n-1} c_n^{n-1} + a_{n-2} c_n^{n-2} + \quad + a_1 c_n + a_0 \end{cases}$$

è un sistema nelle variabili $a_0, a_1, , a_{n-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & & c_1^{n-1} \\ 1 & c_2 & c_2^2 & & c_2^{n-1} \\ & & & & \\ & & & & \\ 1 & c_n & c_n^2 & & c_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \\ \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \\ \\ \\ d_n \end{pmatrix}$$

RICORDIAMO ROUCHÉ-CAPELLI

Le soluzioni di un sistema sono uno spazio affine di $\mathbb{R}^n$ (se esistono).

Ci sono soluzioni se e solo se

rango INCOMPLETA = rang COMPLETA.

Se ci sono soluzioni, lo spazio affine formato delle soluzioni ha dim

$$n - \text{rango INCOMPLETA}$$

$\uparrow$ numero delle variabili.

Nel nostro caso, a meno del segno il determinante della INCOMPLETA è

$$\prod_{i<j} (c_j - c_i) \quad \text{dunque è} \neq 0 .$$

La incompleta ha dunque rango n; tale rango è "massimo" ed è uguale al rango della COMPLETA.

Allora c'è soluzione.

La soluzione è UNICA perché

lo spazio affine delle soluzioni ha dim

$$n - n = 0.$$

e uno spazio affine di dim 0 è un punto in $\mathbb{R}^n$.

ES 6.2.17 (e)

discussione su come conviene svolgere il calcolo di questo determinante 5×5.

(calcolo effettivo lasciato per esercizio)

e indicazione della piattaforma WIMS per controllare il risultato.

<u>TEORIA:</u> "SOMMA DI SOTTOSPAZI"

par 7.3.

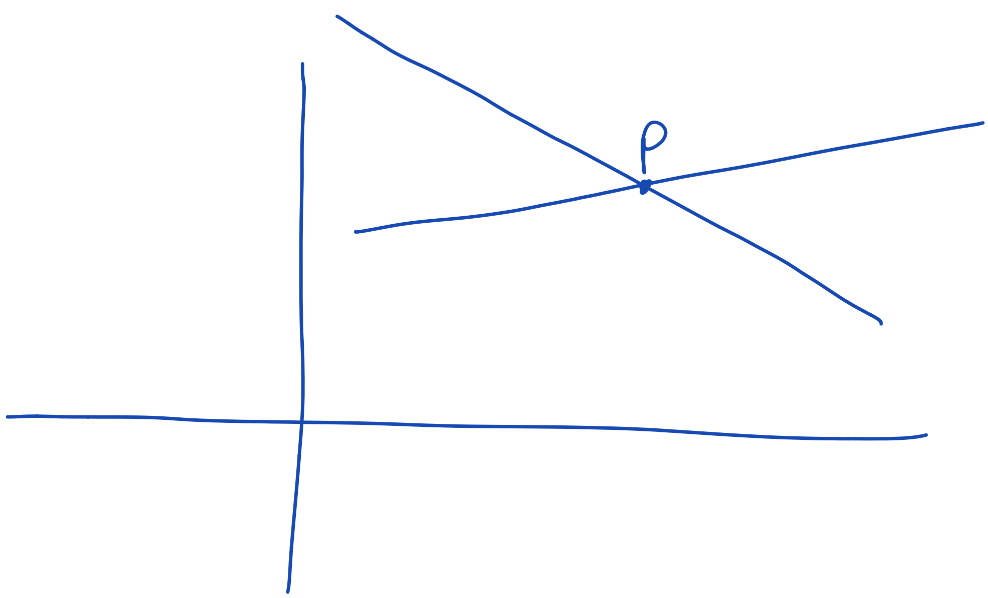
Se A e B in V sp. vett sono sottospazi vettoriali

$$A+B = \{ a+b \mid a \in A,\ b \in B \}$$

e sappiamo che $A+B$ è un s. spazio vettoriale.

Siano E ed F s. spazi affini di V.

Si verifica subito che $E \cap F$, se non è vuoto, è un s. spazio affine.



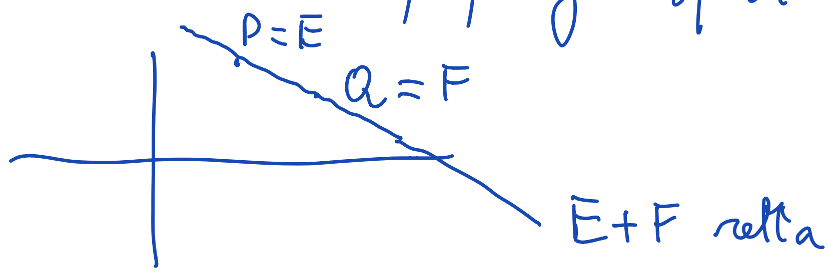
Per analogia con i s. spazi vettoriali definiamo

SOMMA $E+F$

come il più piccolo s. spazio affine di V che contiene $E \cup F$.

(coincide con $\bigcap_{\substack{H \text{ varia} \\ \text{fra tutti i} \\ \text{s. spazi affini} \\ \text{che contengono} \\ E \cup F}} H$).

Cerchiamo un "analogo" della formula di GRASSMANN, per gli spazi affini.



Prop 7.3.1 $\quad$ Se $E \cap F \neq \emptyset$

Vale

$$\dim E + \dim F = \dim(E \cap F) + \dim(E + F)$$

Dim $\quad$ Scelgo $v_0 \in E \cap F$

e allora posso scrivere

$$E = v_0 + W$$

$$F = v_0 + Z$$

dove W e Z sono s. sp. vett di V.

Allora

- $E \cap F = v_0 + W \cap Z$
- $E + F = v_0 + (W + Z)$

perché

$v_0 + (W + Z)$ è sp. affine che contiene E e contiene F.

Viceversa se uno sp. affine contiene $E \cup F$ allora contiene

$v_0 + w$ con $w \in W$

$v_0 + z$ con $z \in Z$

dunque

$$E + F = v_0 + \text{s.sp. vettoriale } X$$

X deve contenere ogni $w \in W$

deve contenere anche

ogni $z \in Z$

il più piccolo X possibile

è $W + Z$

La conclusione segue da Grassmann.

la formula

$\square$

Prop 7.3.2.

Siano $E = v_0 + W$

$F = u_0 + Z$ s. spazi affini di V

con $E \cap F = \emptyset$

Allora

$$\dim(E+F) = 1 + \dim(W+Z)$$

Dim Sia $x_0 = u_0 - v_0$

OSS 1 $x_0 \notin W+Z$

OSS 2 $E+F = v_0 + \text{Span}(\{x_0\} \cup W+Z)$.

se dimostriamo queste due osservazioni abbiamo finito

Dim OSS 1 per assurdo.

se $x_0 = w + z$ $\quad w \in W$, $z \in Z$

$$u_0 - v_0 = w + z$$

$$\underline{v_0 + w} = \underline{u_0 - z}$$

$$\overset{\pitchfork}{E} \qquad \overset{\pitchfork}{F}$$

dunque $v_0 + w = v_0 - z \in E \cap F$

che non sarebbe $\emptyset$ ASSURDO.

<u>OSS 2</u> Chiamiamo

$$X = \text{Span}\left(\{x_0\} \cup (W + Z)\right)$$

$$L = v_0 + X$$

L è un s. spazio affine che contiene

$E \cup F$ (verifica immediata*)

* In particolare L contiene

$v_0 + x_0 + z$ al variare di $z \in Z$

$v_0 + v_0 - v_0 + z$ al variare di $z \in Z$

$v_0 + z$

cioè contiene $v_0 + Z = F$

Ora mostriamo che L è il più piccolo s. spazio affine che contiene $E \cup F$.

Sia $T = v_0 + Y$ uno sp. affine che contiene $E \cup F$, dobbiamo mostrare che $T \supseteq L$.

$$\left.\begin{array}{l} T \supset E \Rightarrow Y \supset W \\ T \supset F \Rightarrow Y \supset Z \\ T \ni v_0 \Rightarrow Y \ni v_0 - v_0 = x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow Y \supset X$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ v_0+Y}}{T} \supset \underset{\substack{\uparrow \\ v_0+X}}{L} \qquad \square$$

$$\begin{cases} T = v_0 + Y = u_0 + Y \text{ perché } u_0 \in T \text{ infatti } u_0 \in F \subset T \\[2em] T = v_0 + Y \\ u_0 \in T \\ u_0 = v_0 + y \text{ dove } y \in Y \\ u_0 - v_0 = y \in Y \end{cases}$$