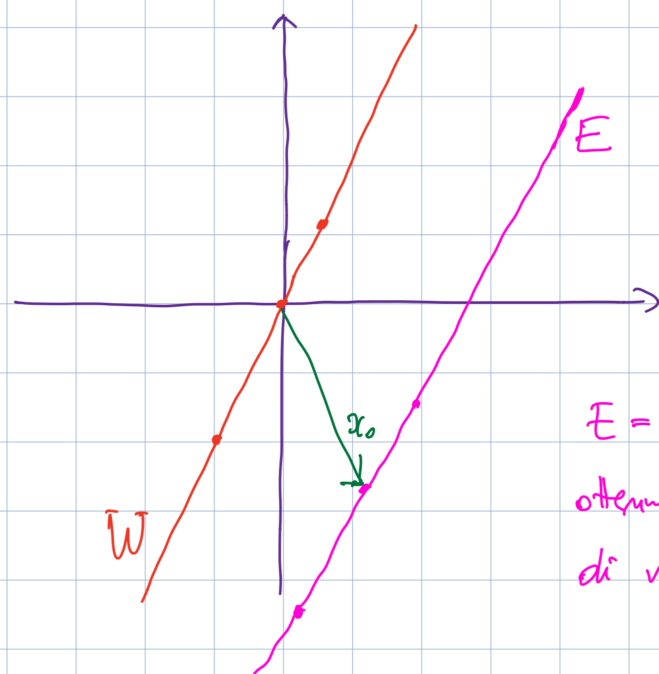
Algebra lineare

Sottosp. affini: V sp. vett.; chiamo $E \subset V$ un sottosp. affine se esistono $x_0 \in V$ e $W \subset V$ stsp. vett. t.c. $E = \{x_0 + w : w \in W\}$; scrivo $E = x_0 + W$.
Dico che E ha dim = alla dim. di W.

Es: $V = \mathbb{R}^2$; $W = \{0\}$ sottosp. affini: i punti di $\mathbb{R}^2$;

W = retta:

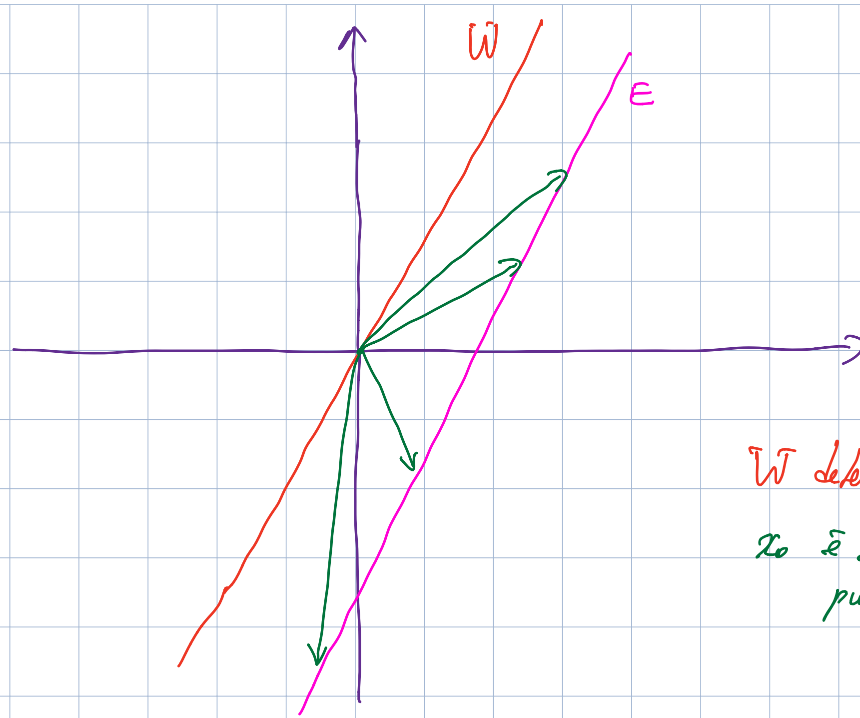


E = retta non (nec.) per 0 ottenuta traslando W di vettore x_0.

"stsp. aff" = "sottosp. vett. traslato fuori dall'origine".

$W = \mathbb{R}^2$; $E = \mathbb{R}^2$.

Sottosp. affine E è $E = x_0 + W$, W stsp. vett.
Q: in che misura x_0 e W dipendono da E?



Prop: dato $E = x_0 + W$ si ha $E = y_0 + Z \iff Z = W,\ y_0 \in E$.

Dim: $\Rightarrow$ Supponiamo $E = x_0 + W = y_0 + Z$;

$$x_0 = x_0 + \underset{W}{\underset{\cap}{0}} = \underline{y_0} + \underset{Z}{\underset{\cap}{z_0}} \qquad y_0 = y_0 + \underset{Z}{\underset{\cap}{0}} = x_0 + \underset{W}{\underset{\cap}{w_0}} \in E$$

$W \subset Z$: preso $w \in W$ ho $x_0 + w \in E \Rightarrow x_0 + w = y_0 + z$

$\Rightarrow w = y_0 - x_0 + z = -z_0 + z \Rightarrow w \in Z$

$Z \subset W$: preso $z \in Z$ ho $y_0 + z \in E \Rightarrow y_0 + z = x_0 + w$

$\Rightarrow z = x_0 - y_0 + w = -w_0 + w \Rightarrow z \in W$.

$\Leftarrow$ chiamo $U = Z = W$, $y_0 \in x_0 + U$

$\Rightarrow y_0 = x_0 + u_0 \qquad u_0 \in U$.

$E \subset F$: $u \in U \Rightarrow x_0 + u = y_0 - u_0 + u \in y_0 + U \ldots$ ☒

Def: se $E = x_0 + W$ si chiama W (sottosp. di) giacitura di E.

— ∘ —

In $\mathbb{R}^n$ diciamo che un sottospazio affine E ha una parametrizzazione:

parametrica: se si scrive $E = x_0 + \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k)$
$= \{x_0 + t_1 w_1 + \dots + t_k w_k : t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$

Es: $E = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ \pi \\ e \end{pmatrix}\right)$

$E = \left\{ \begin{pmatrix} 7 + 2t + 4s \\ -1 + t + \pi s \\ 5 - 3t + es \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$

$E : \begin{pmatrix} 7 + 2t + 4s \\ -1 + t + \pi s \\ 5 - 3t + es \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = 7 + 2t + 4s \\ y = -1 + t + \pi s \\ z = 5 - 3t + es \end{cases}$

modi equiv. di scrivere una pr. param.

Oss: se $E = x_0 + \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k)$ allora $\dim(E) \leq k$.

cartesiana: se si scrive E come $\{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x = b\}$
con $A \in M_{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Att: in generale $\{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x = b\}$ può essere $\emptyset$ (non è un stsp. aff.); se non è $\emptyset$, cioè contiene x_0, visto che è $x_0 + \mathrm{Ker}(A)$ dunque è stsp. aff.

Oss: in tal caso $\dim(E) \geq n - m$.

Es: $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 4 \\ \pi \cdot x + 7y - \sqrt{2} z = e \end{array} \right\}$

$E : \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ \pi \cdot x + 7y - \sqrt{2} z = e \end{cases}$

scrittura equiv. di una parametr. cart. di E tramite equaz.

Att: scrivendo $E : \begin{cases} \equiv \end{cases}$ devo prima dire in quale $\mathbb{R}^n$ mi trovo:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 7x - 5y + 4z = 11 \right\} \qquad \dim = 2$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 7x - 5y + 4z = 11 \right\} \qquad \dim = 3.$$

Prop: dato $E \subset \mathbb{R}^n$ con $\dim(E) = k$ è sempre possibile darne parametrizzazione con k (o più) parametri e con $n-k$ (o più) equazioni cartesiane.

Dim: se $E = x_0 + W$ basta prendere $w_1, \dots, w_k$ base di W e ho $E = x_0 + \operatorname{Span}(w_1, \dots, w_k)$.

Per parametrizz. cart. serve A matrice $M_{(n-k)\times n}$ t.c. $\ker(A) = W$.

Completiamo $w_1, \dots, w_k$ a base $w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_n$ di $\mathbb{R}^n$ e definiamo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ la appl. lin. t.c.

$$f(w_j) = \begin{cases} 0 & j = 1 \dots k \\ e_{j-k} & j = k+1, \dots, n. \end{cases}$$

Facile vedere che $\ker(f) = W$; prendo $A = [f]_{\mathcal{E}^{(n)}}^{\mathcal{E}^{(n-k)}}$.

Posto $b = A \cdot x_0$ ho allora $E: Ax = b$. $\boxtimes$

"Passaggio: pr. cart $\rightsquigarrow$ pr. param": risolvere sistema.
"Passaggio: pr. param $\rightsquigarrow$ pr. cart": eliminare parametri.

Es: $E: \begin{cases} 2x - 5y + 7z = 14 \\ 4x + 3y - 6z = -5 \end{cases} \subset \mathbb{R}^3$

$\begin{cases} 2x = 5y - 7z + 14 \\ 10y - 14z + 28 + 3y - 6z = -5 \end{cases}$ $\begin{cases} 13y - 20z = -33 \\ 2x = 5y - 7z + 14 \end{cases}$

$E: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Span}\begin{pmatrix} 9 \\ 40 \\ 26 \end{pmatrix}$

controllo: devo vedere che $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ risolve sist. non omog.
e $\begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ 13 \end{pmatrix}$ sist omog:

$\begin{cases} 2 + 5 + 7 = 14 \\ 4 - 3 - 6 = -5 \end{cases}$ ✓ $\begin{cases} 18 - 200 + 182 = 0 \\ 36 + 120 - 156 = 0 \end{cases}$ ✓

Es: $E = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$

$\begin{cases} x = 2 + t + 8s \\ y = -5 + 3t - s \\ z = 4 - 7t + 5s \end{cases}$ $\begin{cases} s = y + 3t - 5 \\ x = 2 + t + 8y + 24t - 40 \\ z = 4 - 7t + 5y + 15t - 25 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 8y - 25t = -38 \\ z - 5y - 8t = -21 \end{cases}$

$8(x - 8y) - 25(z - 5y) = 8 \cdot (-38) - 25 \cdot (-21)$

$8x + 61y - 25z = \ldots$ 1 equaz cart.

$\boxed{55.2}$ $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lin. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Provare che è invert. e calcolare $f\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $f^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

V, W sp. di dim. n; $f: V \to W$; Basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

f invertib. $\Longleftrightarrow$ A invertibile $\left(A^{-1} = [f^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \right)$

A iniettiva $\Longleftrightarrow$ col. lin. indip $\Longleftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$ $\Longleftrightarrow$ A suriettiva col. generatori

$\det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = 29 \neq 0 \Rightarrow$ invertibile.

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 53 \end{pmatrix}$$

poiché $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = f\left(-3\begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} \right) = -3\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -15 \\ 53 \end{pmatrix} = \ldots$$

$$\begin{cases} 2\alpha - 15\beta = 2 \\ -9\alpha + 53\beta = 1 \end{cases}$$

$$f^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = f^{-1}\left[\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 53 \end{pmatrix} \right] = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\boxed{5.5.3}$ (a) $\quad V=\mathbb{R}^2 \quad \mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}\right) \quad \mathcal{B}'=\left(\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\right)$

Trovare $\mathcal{B}'=\mathcal{B}\cdot A \quad \mathcal{B}=\mathcal{B}'\cdot X$ e provare che $X=A^{-1}$.

$$A: \quad \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\frac{25}{29}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}+\frac{22}{29}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} \qquad A=\frac{1}{29}\begin{pmatrix}25&5\\22&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\frac{5}{29}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}+\frac{1}{29}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$$

$$X: \quad \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}=\frac{4}{14}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}-\frac{22}{14}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} \qquad X=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}4&23\\-22&25\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}=\frac{23}{14}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\frac{25}{14}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

$$A\cdot X=\frac{1}{29\cdot 14}\cdot\begin{pmatrix}25&5\\22&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&23\\-22&25\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{406}\Big(\ 100$$

———— o ————

$\boxed{5.5.5}$ Verificare formula cambio basi per

$$f:\{x\in\mathbb{R}^3 : x_1+x_2-2x_3=0\}\to\{x\in\mathbb{R}^3 : x_1-x_2+x_3=0\}$$

$$f(x)=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\5x_3-x_2\\3x_1+x_3\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \quad \mathcal{B}'=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \quad \mathcal{C}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \mathcal{C}'=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

Verifico che la formula che definisce f vada bene:

$$(x_2-x_1)-(5x_3-x_2)+(3x_1+x_3)$$
$$=2x_1+2x_2-4x_3=2(x_1+x_2-2x_3)$$

Ok: se $x \in$ dominio allora $f(x) \in$ codominio.

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot A \qquad \mathcal{C}' = \mathcal{C} \cdot X \implies [f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} = X^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot A$$

$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$: $f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\qquad f(x) = \begin{pmatrix}x_2 - x_1\\5x_3 - x_2\\3x_1 + x_3\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}-4 & -3\\8 & 4\end{pmatrix}$$

con calcoli analoghi finire verifica:

$$X \cdot [f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot A.$$

$\boxed{5.5.7}$ Trovare $\mathcal{B}$ di $\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0\}$ t.c.

$$\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \qquad \left[\begin{pmatrix}6\\1\\3\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$$

Ha senso: $2\cdot1 + 3\cdot1 - 5\cdot1 = 0$ ✓ $\qquad 2\cdot6 + 3\cdot1 - 5\cdot3 = 0$ ✓

$\mathcal{B} = (v_1, v_2)$; so:

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 2v_1 - v_2 \qquad v_1 = -2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}6\\1\\3\end{pmatrix} = 5v_1 - 2v_2 \qquad v_2 = -5\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}6\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-3\\1\end{pmatrix}$

(verificare per sostituzione).

$\boxed{5.5.9}$ Trovare base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^2$ t.c.

$$[f_A]_{\mathcal{E}(3)}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}-2a_{11} + 5a_{21} & -2a_{12} + 5a_{22} & -2a_{13} + 5a_{23}\\3a_{11} - 7a_{21} & 3a_{12} - 7a_{22} & 3a_{13} - 7e_{23}\end{pmatrix}$$

$\forall A \in \mathcal{M}_{2\times 3}$.

Teoria: $f_A \cdot \mathcal{E}^{(3)} = \mathcal{C} \cdot \underbrace{[f_A]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}^{(3)}}}$

$$f_A \cdot \mathcal{E}^{(3)} = A \cdot I_3 = A$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}}_{A}$$

$\mathcal{C}$ è questa

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} \right)$$

$\boxed{6.1.2}$

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 42 \\ x + 5y - 6z = -27 \\ 2x + 4y - z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2x + 4y - 2 \\ x + 5y - 12x - 24y + 12 = -27 \\ 4x - 3y + 4x + 8y - 4 = 42 \end{cases} \qquad \begin{cases} 11x + 19y = 39 \\ 8x + 5y = -46 \\ z = \dots \end{cases}$$

soluz. unica (calcoli...)

$\boxed{6.1.4}$

$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 6 \\ 2x - 5y + z = 11 \\ 4x - 3y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -2x + 5y + 11 \\ 3x - 4y - 4x + 10y + 22 = 6 \\ 4x - 3y - 6x + 15y + 33 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + 6y = -16 \\ -2x + 12y = -31 \\ z = \dots \end{cases}$$

Impossibile.