Algebra Lineare 22/11/19

Prop: se $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot A$ allora $[v]_{\mathcal{B}'} = A^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$.

Dim: $v = \mathcal{B} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$ $\qquad v = \mathcal{B}' \cdot \boxed{[v]_{\mathcal{B}'}}$

$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot A \implies \mathcal{B} = \mathcal{B}' \cdot A^{-1}$

$\implies v = \mathcal{B}' \cdot \boxed{A^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}}} \implies [v]_{\mathcal{B}'} = A^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$. $\blacksquare$

---

det: $\exists$ unica funzione $\det_n : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ t.c.

- lin. I colonna
- cambia segno scambiando due col
- vale 1 su I_n.

Formula: $\det_n(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$.

Conseguenze:
- $\det({}^tA) = \det(A)$
- operaz. su righe e colonne
- sviluppi di Laplace
- col. lin. dip. $\implies \det = 0$.

Fatto: $\det = 0 \implies$ col. lin. dip.

Cor: A invertibile $\iff \det(A) \neq 0$.

Cor: dati $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ si ha che $v_1, \dots, v_n$ è base $\iff \det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

Teo (Binet): $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
$(A, B \in M_{n \times n})$.

"Dim:" due casi: B col. lin. dip. $\Rightarrow$ B non è bijettiva $\Rightarrow$ B non è iniettiva $\Rightarrow$ $A \cdot B$ non iniettiva $\Rightarrow$ $A \cdot B$ col. lin. dip; in tal caso $\det(B) = \det(A \cdot B) = 0$ ok.

Altrimenti $\det(B) \neq 0$ e considero la funzione

$$M_{n \times n}(\mathbb{R}) \ni A \longmapsto \frac{\det(A \cdot B)}{\det(B)} \in \mathbb{R}.$$

Facile vedere che questa funzione gode delle 3 proprietà:

- lin. nelle I col
- cambia segno scambiando due col
- vale 1 su I_n: $I_n \longmapsto \frac{\det(I_n \cdot B)}{\det(B)} = \frac{\det(B)}{\det(B)} = 1$.

$$\Rightarrow \frac{\det(A \cdot B)}{\det(B)} = \det(A).$$ ▨

Prop: se $A \in M_{n \times n}$ e $\det(A) \neq 0$ allora

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det(A)} \cdot \det(A^{ji}).$$

Es: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertibile se $ad - bc \neq 0$;

inversa: $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Es: $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -22 & 4 & 19 \\ 26 & -5 & -13 \end{pmatrix}$$

$$= -1 \cdot \det\begin{pmatrix} -22 & 19 \\ 26 & -13 \end{pmatrix} = -(286 - 494) = 208$$

$$A^{-1} = \frac{1}{208}\begin{pmatrix} 43 & 13 & 19 \\ 11 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

Prop: $(A^{-1})_{ij} = \underbrace{\frac{(-1)^{i+j}}{\det(A)} \cdot \det(A^{ji})}$.

Dimo: lo chiamo b_{ij} $B = (b_{ij})$;
devo vedere che $B = A^{-1}$ ovvero $B \cdot A = A \cdot B = I_n$
(ciascuna delle due implica l'altra). Vediamo $B \cdot A = I_n$:
devo vedere che $(B \cdot A)_{ik} = \delta_{ik}$:

$$(B \cdot A)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, a_{jk} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{i+j}}{\det(A)} \cdot \det(A^{ji}) \cdot a_{jk}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \cdot \boxed{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{jk} \cdot \det(A^{ji})}$$

se qui fosse scritto i sarebbe lo sviluppo di $\det(A)$ lungo riga i.

Dunque per $k = i$ trovo $\frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A) = 1$;

per $k \neq i$ ho lo sviluppo lungo la riga i-esima di una matrice ottenuta da A sostituendo alla riga i-esima la k-esima $\Rightarrow$ è il det di una matrice con due righe uguali $\Rightarrow$ fa 0. ▨

Formula di Cramer:

dato un sistema lineare quadrato $A \cdot x = b$
se $\det(A) \neq 0$ allora la soluzione è

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

dove A_i è la matrice ottenuta da A sostituendo la i-esima colonna con b.

Es:
$$\begin{cases} 7x - 5y = 11 \\ 4x + 9y = -8 \end{cases} \qquad \det\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}} = \frac{59}{83} \qquad y = \frac{\det\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}} = -\frac{100}{83}$$

Es:
$$\begin{cases} 5x - 2y + 3z = 1 \\ 4x + 7y - z = -4 \\ -8x + 2y + 5z = 13 \end{cases}$$

$$x = \dots \qquad y = \frac{\det\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & -1 \\ -8 & 13 & 5 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 4 & 7 & -1 \\ -8 & 2 & 5 \end{pmatrix}} \qquad z = \dots$$

Soluz. di $A \cdot x = b$ se $\det(A) \neq 0$ è

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}.$$

Dim: $\quad x = A^{-1} \cdot b$

$$\Rightarrow x_i = (A^{-1} \cdot b)_i = \sum_{j=1}^{n} (A^{-1})_{ij} \cdot b_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{i+j}}{\det(A)} \cdot \det(A^{ji}) \cdot b_j$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \cdot \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot b_j \cdot \det(A^{ji})$$

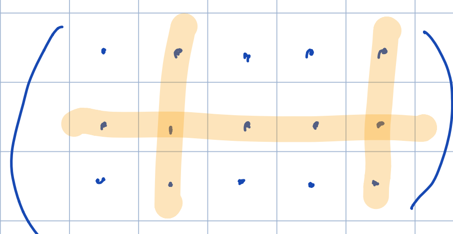
se qui ci fosse a_{ji} sarebbe sviluppo di $\det(A)$ lungo i-esima colonna

$\Longrightarrow$ è lo sviluppo lungo i-esima colonna di $\det(A_i)$

A_i = matrice ottenuta da A sostituendo colonna i con b.

$$= \frac{\det(A_i)}{\det(A)}. \qquad \blacksquare$$

Def: se $A \in M_{m \times m}$ chiamo **sottomatrice** di A una ottenuta cancellando alcune righe e colonne.



Dico che la sottomatrice C di A è <u>orlata</u> della sottomatrice B di A se B è ottenuta da C togliendo una riga e una colonna, ovvero se C è ottenuta da B riaggiungendo una riga e una colonna di A.

<u>Es</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \pi & \sqrt{3} & 0 \\ -7 & 5 & \sqrt{2} & -2 & 11 \\ 6 & 9 & -4 & 3\pi & -e \\ -8 & 17 & \sqrt{\pi} & 43 & 19 \end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 17 & 43 \end{pmatrix}$ è sottomatrice 2×2 di A.

Le sue orlate sono:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & \sqrt{3} \\ -7 & 5 & -2 \\ -8 & 17 & 43 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -7 & 5 & -2 \\ 6 & 9 & 3\pi \\ -8 & 17 & 43 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & \pi & \sqrt{3} \\ 5 & \sqrt{2} & -2 \\ 17 & \sqrt{\pi} & 43 \end{pmatrix}$$

$*$ $\qquad$ $*$ $\qquad$ $*$

<u>Teo</u>: data $A \in M_{m\times n}$ se esiste una sottomatrice B $r\times r$ t.c. $\det(B) \neq 0$ e $\det(C) = 0$ per tutte le orlate di B allora $\mathrm{rank}(A) = r$.

<u>Ricorda</u>: $\mathrm{rank}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(\mathrm{Span}(\text{col. di } A))$
$=$ "max. numero di col. di A lin. indip."

Strategie per trovare rank(A):

- se tutti i coeff. di A sono 0, cioè tutte le sottomatrici 1x1 hanno det = 0, allora rank = 0.

- altrimenti fisso un coeff $\neq 0$ (una sottomatr 1x1 con det $\neq 0$) e guardo le sue orlate (2x2)

  NON tutte le 2x2 solo orlate 1x1 fissata

- calcolando il det di tali orlate una dopo l'altra, due casi:
  - → fanno tutti 0 $\Longrightarrow$ rank = 1
  - → appena ne trovo una con det $\neq 0$ mi fermo, fisso lei e guardo tutte le sue orlate 3x3

  NON tutte le 3x3 solo orlate 2x2 fissata

- calcolando il det di tali orlate
  - → fanno tutti 0 $\Longrightarrow$ rank = 2
  - → appena ne trovo una con det $\neq 0$ mi fermo, guardo le sue orlate 4x4 ....

Es:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & -8 & 11 \\ -2 & -3 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & -4 & 19 \\ 1 & 8 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

tutte le sottomatr 2x2: $\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{2} = 10\cdot 6 = 60$

orlate della 1x1: $4 \cdot 3 = 12$

ho una 2x2 con $\det \neq 0 \Rightarrow \text{rank} \geq 2$;
guardo le sue orlate 3x3.

tutte le sottomatrici 3x3
$\binom{5}{3}\cdot\binom{4}{3} = 10\cdot 4 = 40$

le orlate della 2x2
$3\cdot 2 = 6$

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = -8 + 112 + 9 + 4 - 21 - 96 = 125 - 125 = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 3 & -8 & 11 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 96 + 22 + 15 - 80 - 9 - 44 = 133 - 133 = 0$$

0 0 0 0

$\Rightarrow \text{rank} = 2.$

Teo: $A \in M_{m\times n}$ B sottomatrice $r\times r$ t.c. $\det(B)\neq 0$
$\det(C') = 0$ $\forall C'$ orlata di B $\Rightarrow \text{rank}(A) = r$.

Cor: $\text{rank}({}^tA) = \text{rank}(A)$
$\Rightarrow$ il max numero di righe lin. indip. è uguale al max numero di colonne lin. indip.

Dimo: osservo che se riordino le righe e/o le col. di A il rango non cambia. Posso allora supporre che B sia l'angolo in alto a sinistra:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline * & * \end{array}\right)$$. Introduco notazione:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} c_1 & \cdots & c_r & c_{r+1} & \cdots & c_m \\ \hline a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,r} & a_{m,r+1} & \cdots & a_{m,m} \end{array}\right)$$

$\det(B) = \det(c_1, \dots, c_r) \neq 0 \Rightarrow c_1, \dots, c_r$ lin. indip

$\Rightarrow$ le prime r col. di A sono lin. indip.

Per concludere: provo che per $j > r$ la j-esima col. di A è comb. lin. delle prime r. Prendo $k > r$ e considero l'orlato di B aggiungendo riga k e colonna j:

j fissato
$k \in \{r+1, \dots, m\}$ variabile

$$\det \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_r & c_j \\ a_{k,1} & \cdots & a_{kr} & a_{kj} \end{pmatrix} = 0$$

esistono costanti $\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_r^{(k)}$ t.c.

$$\begin{pmatrix} c_j \\ a_{kj} \end{pmatrix} = \alpha_1^{(k)} \begin{pmatrix} c_1 \\ a_{k1} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_r^{(k)} \begin{pmatrix} c_r \\ a_{kr} \end{pmatrix}$$

ma allora $c_j = \alpha_1^{(k)} c_1 + \dots + \alpha_r^{(k)} c_r$

ma $C_1, \dots, C_r$ lin. indip $\Rightarrow \alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_r^{(k)}$ non dipendono da k

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} C_j \\ a_{r+1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} C_1 \\ a_{r+1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_r \begin{pmatrix} C_r \\ a_{r+1,r} \\ \vdots \\ a_{m,r} \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$