Algebra Lineare 20/11/19

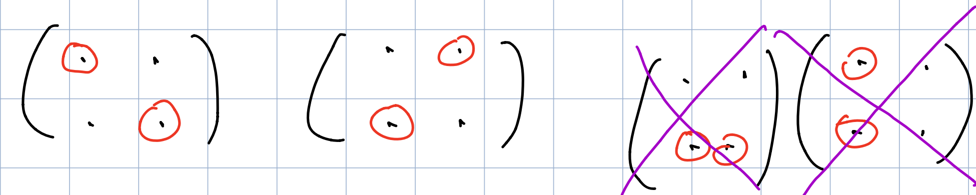
Ven. 22/11 10:30–12:30 B23 recupero

27/11 Niente ; 4/12 Gaiffi x 3.

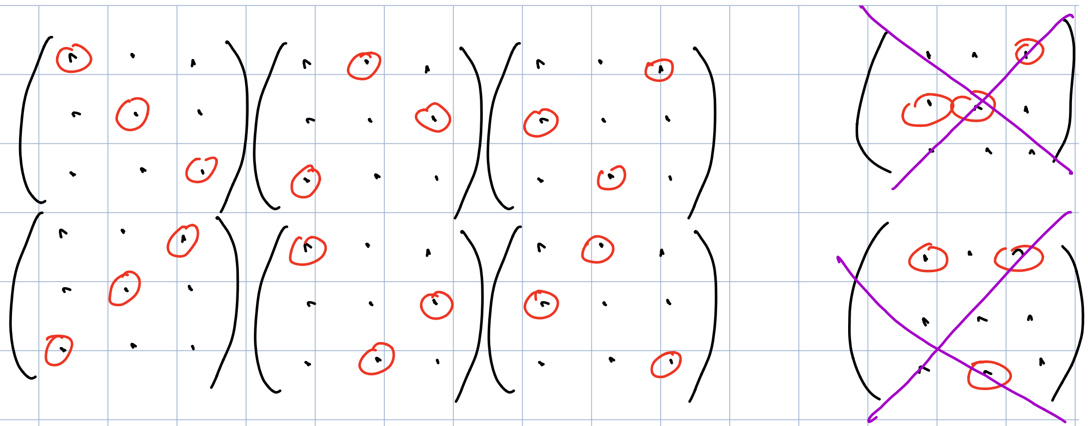
$\det_n$: la funzione che serve per verificare se una matrice $n \times n$ è invertibile, cioè se ha colonne lin. indip e/o che generano $\mathbb{R}^n$.

		numero di addendi	ogni addendo prodotto di quanti coeff
1x1	$\det_1(a_{11}) = a_{11}$	1	1
2x2	$\det_2\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$	2	2
3x3	$\det_3\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$	6	3
	$= + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$		
Formula esplicita per $\det_n$	4x4	24	4
	$n \times n$	$n!$	n

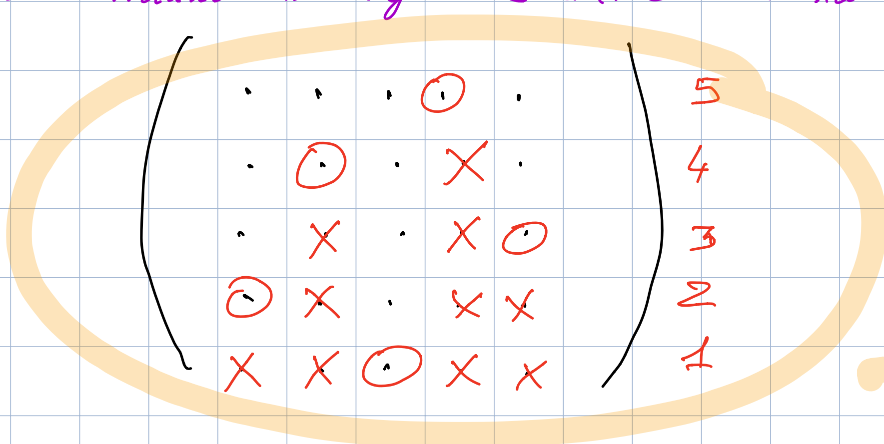
2x2



3×3



Compaiono i prodotti di n coeff che stanno su righe e col. diverse tra loro:



$+/-?$

$\det_n(A)$ = la somma degli $n!$ prodotti di n coeff della matrice presi su righe e colonne diverse fra loro, ciascun addendo con opportuno segno $+/-$.

<u>Permutazioni</u> $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$; chiamo permutazione di $\{1,\dots,n\}$ una funzione $\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ biiettiva cioè un riordinamento di $\{1,\dots,n\}$. Indico l'insieme

di tutte le permutazioni con $\mathfrak{S}_n$ (S_n);
scrivo gli el. di $\mathfrak{S}_n$ così:

$$(4,7,2,5,1,3,6) \in \mathfrak{S}_7$$

è la funzione
$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 4 \\ 2 &\longmapsto 7 \\ 3 &\longmapsto 2 \\ 4 &\longmapsto 5 \\ 5 &\longmapsto 1 \\ 6 &\longmapsto 3 \\ 7 &\longmapsto 6 \end{aligned}$$

cioè scrivo σ come $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \dots, \sigma(n))$.

Oss: $\mathfrak{S}_n$ ha $n!$ elementi

Def: chiamo segnatura di $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

"$\prod$ = produttoria"   Es: $n! = \prod_{j=1}^{n} j$.

Oss: nella formula per sgn corrispondono a tutte le coppie non ordinate di elementi in $\{1, \dots, n\}$, dunque ce ne sono $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

[$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ è il numero di sottoinsiemi con k elementi in un insieme con n elementi.]

Es: $\sigma = \begin{pmatrix} \overset{\sigma(1)}{4} & \overset{\sigma(2)}{1} & \overset{\sigma(3)}{2} & \overset{\sigma(4)}{3} \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_4$

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \frac{1-4}{2-1} \cdot \frac{2-4}{3-1} \cdot \frac{3-4}{4-1} \cdot \frac{2-1}{3-2} \cdot \frac{3-1}{4-2} \cdot \frac{3-2}{4-3} = -1$$

Fatti: (1) $\operatorname{sgn}(\sigma) = \pm 1$.

(2) $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau)$.

Def: chiamo trasposizione un elemento di $\mathfrak{S}_n$ che consiste nello scambiare tra loro due elementi:

$$(1\,2\,7\,4\,5\,6\,3\,8\,9) \in \mathfrak{S}_9.$$

Oss: ogni permutaz. è composizione di trasposizioni.

Es: $(5\,3\,1\,2\,4) \in \mathfrak{S}_5$

$$\downarrow$$
$$(1\,3\,5\,2\,4)$$
$$\downarrow$$
$$(1\,2\,5\,3\,4)$$
$$\downarrow$$
$$(1\,2\,3\,5\,4)$$
$$\downarrow$$
$$(1\,2\,3\,4\,5)$$

$(5\,3\,1\,2\,4)$ esprime come composiz. di 4 trasp.

Es: $(5\,3\,1\,2\,4) \to (3\,5\,1\,2\,4) \to (3\,1\,5\,2\,4)$

$(1\,2\,3\,5\,4) \leftarrow (1\,3\,2\,5\,4) \leftarrow (1\,3\,5\,2\,4)$

$\downarrow$

$(1\,2\,3\,4\,5)$

$(5\,3\,1\,2\,4)$
esprime come composiz.
di 6 trasp.

Oss: non è unico né il modo di esprimere una permutaz. come composiz. di trasp. né il numero di tali trasp.
Però (vedremo ora perché) è unica la parità di tale numero.

Oss: $\mathrm{sgn}(\text{trasposizione}) = -1$;

$$\mathrm{sgn}(1\,5\,3\,4\,2) = \frac{5-1}{2-1} \cdot \cancel{\frac{3-1}{3-1}} \cdot \cancel{\frac{4-1}{4-1}} \cdot \frac{2-1}{5-1} \cdot \frac{3-5}{3-2} \cdot \frac{4-5}{4-2} \cdot \frac{2-5}{5-2} \cdot \cancel{\frac{4-3}{4-3}} \cdot \frac{2-3}{5-3} \cdot \frac{2-4}{5-4} = -1$$

Conseguenza: se $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ e $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$
τ_j trasposizioni

$$\Longrightarrow \mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\tau_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{sgn}(\tau_k)$$
$$= \underbrace{(-1) \cdot \ldots \cdot (-1)}_{k} = (-1)^k .$$

Es: $(4\,1\,7\,3\,2\,6\,5) \in \mathfrak{S}_7$

$(4173265) \rightarrow (1473265) \rightarrow (1273465) \rightarrow (1237465) \rightarrow (1234765) \leftarrow (1234567)$

$\Longrightarrow \operatorname{sgn}(4173265) = -1.$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

a_{14}	$a_{1,\sigma(1)}$	$\sigma(1)=4$
a_{22}	$a_{2,\sigma(2)}$	$\sigma(2)=2$
a_{31}	$a_{3,\sigma(3)}$	$\sigma(3)=1$
a_{45}	$a_{4,\sigma(4)}$	$\sigma(4)=5$
a_{53}	$a_{5,\sigma(5)}$	$\sigma(5)=3$

(42153)
(12453)
(12354)
(12345)

$\operatorname{sgn} = -1$

nel det 5x5: $\underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma)}_{\text{il segno giusto.}} \cdot \prod_{i=1}^{5} a_{i,\sigma(i)}$

Teo: $$\det_n(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Due approcci teorici possibili:

1. Dimostrare esistenza e unicità del det date le proprietà assiomatiche e poi provare formula
2. Definire il det con la formula e poi provare le proprietà.

Conseguenze della formula:

- $\det({}^tA) = \det(A)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}}_{\substack{\text{uno dei 24} \\ \text{per } A \\ \text{con segno} \\ \text{sgn}(2\,4\,1\,3)}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}}_{\substack{\text{uno dei 24} \\ \text{per } {}^tA \\ \text{con segno} \\ \text{sgn}(3\,1\,4\,2)}}$$

inverse fra loro

$\Longrightarrow$ stessa segnatura poiché

$$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$$

$$\sigma^{-1} = \tau_k \circ \dots \circ \tau_1 \qquad (\tau_j^{-1} = \tau_j)$$

- formula di sviluppo (di Laplace):

Notazione: se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ chiamo A^{ij} la matrice ottenuta da A cancellando la riga i e colonna j.

sviluppo lungo la i-esima riga:

indice riga fisso

$$\det_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det_{n-1}(A^{ij}).$$

Es: $\det \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & -4 \\ -3 & 12 & \pi & e \\ \sqrt{2} & -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

$$= (-1)^{3+1} \cdot (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 5 & 1 & -4 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 12 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -4 \\ \sqrt{2} & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{3+3} \cdot \pi \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & -4 \\ \sqrt{2} & -5 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot e \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ \sqrt{2} & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

= 24 addendi $(24 = 4!)$

sviluppo lungo la colonna i:

indice col. fisso

$$\det_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} \cdot a_{ji} \cdot \det_{n-1}(A^{ji}).$$

———— o ————

Calcolo pratico del det:

* usare delle operazioni per ottenere molti zeri su una riga o una colonna
* a quel punto fare sviluppo lungo tale riga/colonna.

Teo: esiste una e una sola funzione $\det_n : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ t.c.

1. E' lineare nella prima colonna fissate le altre
2. Scambiando due colonne cambia segno
3. Vale 1 per I_n.

Conseguenze: • $\det_n$ è lineare in ciascuna colonna

• se una matr. ha due col. uguali, $\det = 0$

• se una matrice ha le colonne lin. dip. allora $\det = 0$:

col. lin. dip $\Rightarrow$ una di esse è comb. lin. altre

$$A = (v_1, v_2, \dots, v_n) \qquad v_j = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \dots + \alpha_n v_n$$

$$\det(A) = \det(v_1, \dots, \overbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n}^{j}, \dots, v_n)$$

$$= \underbrace{\alpha_1 \cdot \det(v_1, \dots, \underbrace{v_1}_{j}, \dots, v_n)}_{0} + \dots + \underbrace{\alpha_n \det(v_1, \dots, \underbrace{v_n}_{j}, \dots, v_n)}_{0}$$

• le seguenti operazioni non cambiano il det:

(1) sostituire una colonna con sé stessa + multiplo altra

(2) sostituire una riga con sé stessa + multiplo di altra.

(1): $(v_1, \dots, v_n) = (v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n)$

$$\Downarrow$$

$$(v_1, \dots, v_i + \alpha v_j, \dots, v_j, \dots, v_n)$$

$$\downarrow \det$$

$$\det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) + \alpha \cdot \det(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_n)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{0}$$

(2) sapendo che $\det({}^tA) = A$ una proprietà per colonne vale anche per righe.

Es:

$$\det \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} 4 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 6 & -4 & 2 & 15 \\ -2 & 6 & 9 & -8 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array}$$

$$= \det \left(\begin{array}{cccc} -2 & -14 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 6 & -4 & 2 & 15 \\ -2 & 6 & 9 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 - 3r_2 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array}$$

$$= \det \left(\begin{array}{cccc} -2 & -14 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 10 & 6 & 0 & 21 \\ 16 & 51 & 0 & 19 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 - 3r_2 \\ r_2 \\ r_3 + 2r_2 \\ r_4 + 9r_2 \end{array}$$

$$= (-1)^{2+3} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & -14 & -2 \\ 10 & 6 & 21 \\ 16 & 51 & 19 \end{pmatrix}.$$