

DETERMINANTE (PARAGRAFO 6.2)

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

Sappiamo che A è invertibile se e solo se rappresenta una applic. lineare bigettiva.

Dato il teorema $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim V$ in questo caso basta verificare che $\dim \text{Im } f = 2$.

Questo equivale a dire che per ogni vettore $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ il sistema

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

nelle variabili x, y ha soluzione.

$$* \begin{cases} ax + by = \xi \\ cx + dy = \eta \end{cases}$$

$$** \begin{cases} d \cdot (ax + by) - b(cx + dy) = d\xi - b\eta \\ -c(ax + by) + a(cx + dy) = -c\xi + a\eta \end{cases}$$

OSS se $ad \neq 0$ oppure $bc \neq 0$

il sistema $**$ è equivalente a $*$.

Semplificando

$$\begin{cases} (ad - bc) \cdot x = d\xi - b\eta \\ (ad - bc) y = -c\xi + a\eta \end{cases}$$

se $ad - bc \neq 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

e dunque il sistema ammette un'unica soluzione.

Inoltre abbiamo scoperto che A è invertibile
e $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ è l'inversa
di A .

OSS Riassumendo, se $ad-bc \neq 0$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile e

la sua inversa è

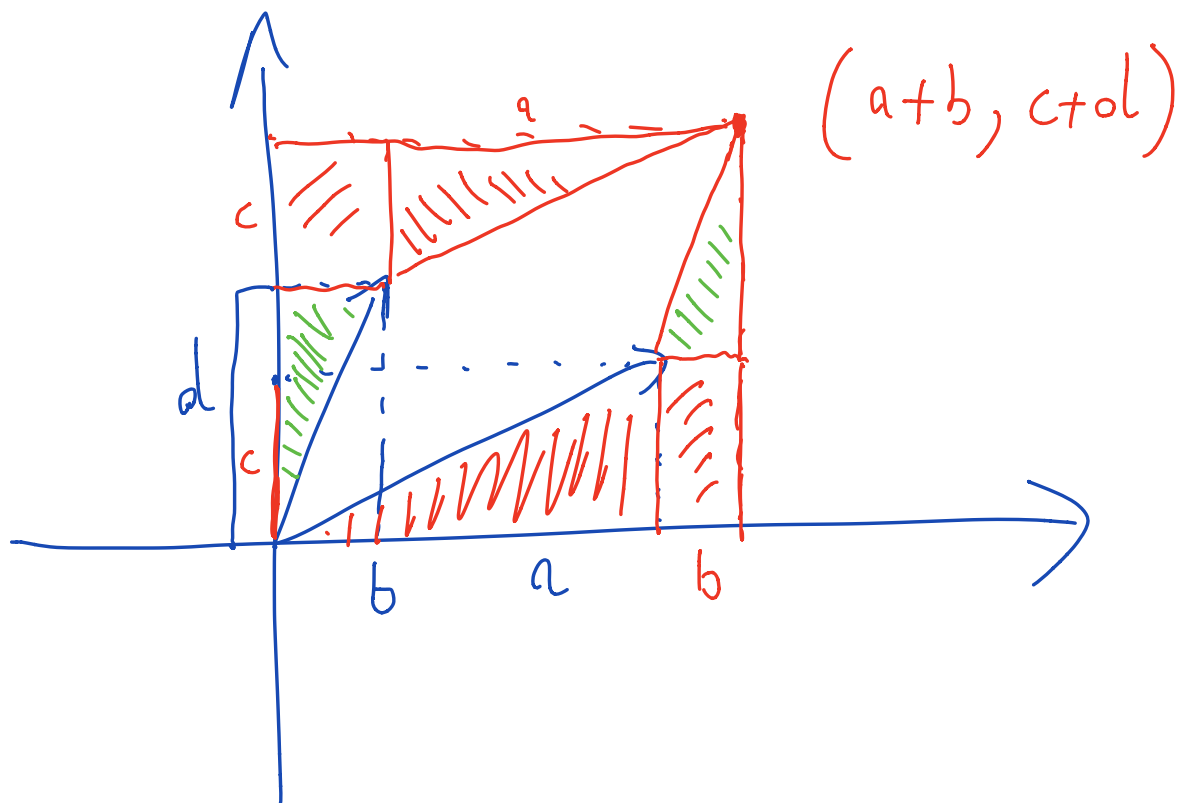
$$\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Emerge dunque l'importanza del numero
 $ad-bc$

Def $ad-bc$ si chiama

"determinante" della matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$



area del parallelogramma

$$(a+b)(c+d) - 2b \cdot c - 2 \frac{1}{2} a \cdot c - 2 \frac{1}{2} b \cdot d = ad - bc.$$

Quindi il determinante esprime anche

l'area del parallelogramma di vertici

(a, c) e (b, d) .

MA ATTENZIONE!

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -1$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

Perciò in realtà il determinante dà
l'area con segno:

dati due vettori $u, v \in \mathbb{R}^2$ il
numero $\det(u, v)$ ha valore assoluto
uguale all'area del parallelogramma di
vertici u e v ; il segno di
 $\det(u, v)$ è positivo se l'angolo
da u a v è $< \pi$, altrimenti è negativo.

Generalizziamo a $\mathbb{R}^3$, si trova che
il volume del parallelepipedo di vertici

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \text{ è}$$

dato dal valore assoluto del numero

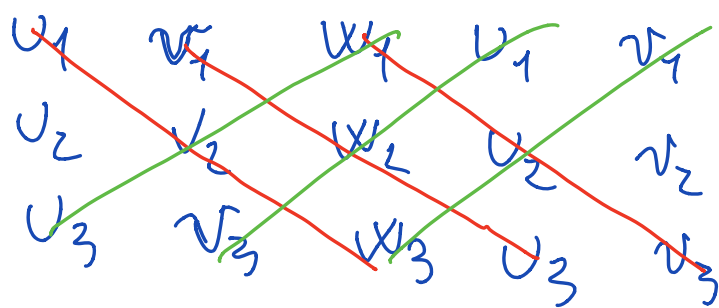
$$u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 \\ - u_1 v_3 w_2 - u_2 v_1 w_3 - u_3 v_2 w_1$$

Diremo che tale numero è il

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

Per calcolare il determinante può essere utile ricordare la
REGOLA DI SARRUS

Dato una matrice 3×3



si sommano i prodotti delle diagonali
rosse e si sottraggono i prodotti delle
diagonali verdi

Procedendo in modo analogo per $\mathbb{R}^n$
si definisce una funzione

$$\det_n: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

con la proprietà che $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$
è invertibile se e solo se $\det_n A \neq 0$.

NON VERRÀ DIMOSTRATO

Teorema

Per ogni $n \geq 1$ esiste una
e una sola funzione

$$\det_n : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

1) Fissati $v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$

la funzione

$$\mathbb{R}^n \ni v_1 \rightarrow \det(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

è lineare

2) scambiando fra loro due colonne
di una matrice il $\det$ cambia

segue

$$3) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Corollario segue che $\det$ è lineare rispetto ad ogni colonna.

Esempio

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = -6$$

$$\det \left(\begin{array}{c|c} 1+3 & 5 \\ \hline 2+4 & 6 \end{array} \right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
 -4 $\uparrow$
 -2

In generale

$$\det (u+v, v_2, \dots, v_n) =$$

$$= \det (u, v_2, \dots, v_n) + \det (v, v_2, \dots, v_n)$$

