Algebra Lineare 19/11/19

Es: $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$; $\mathcal{S}_n = \{A : {}^tA = A\}$, $\mathcal{A}_n = \{A : {}^tA = -A\}$

Verificare che $\mathcal{M}_{n\times n} = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$ e trovare proiez.

$$\dim(\mathcal{S}_n) = n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$ noto

$$\dim(\mathcal{A}_n) = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$ noto.

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n}{2}(n+1+n-1) = n^2$$ ok

Basta vedere che $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$: ${}^tA = A$, ${}^tA = -A \Rightarrow A = 0$.

$\Rightarrow \mathcal{M}_{n\times n} = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

Cerco proiezioni: $X \in \mathcal{M}_{n\times n}$; chiamo S, A le sue proiez:

$$X = S + A \qquad {}^tS = S \qquad {}^tA = -A$$

$${}^tX = S - A \Leftarrow {}^tX = {}^tS + {}^tA$$

$$X + {}^tX = 2S \Rightarrow S = \frac{1}{2}(X + {}^tX)$$
$$X - {}^tX = 2A \qquad A = \frac{1}{2}(X - {}^tX).$$

$\boxed{5.2.11}$ Verificare che $\mathbb{R}^3 = W \oplus Z$ e trovare proiez:

$W: 4x_1 + 3x_2 - 2x_3$ dim = 2

$Z: \begin{cases} -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ dim = 1 $2+1=3$

Basta vedere che $W \cap Z = \{0\}$ cioè che $\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$ ha solo soluz. 0.

Oppure: $Z: \begin{cases} x_3 = 2x_1 \\ x_2 = 6x_1 \end{cases}$ $Z = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Trovo le proiez. p e q su W e Z così:

$$x = \underset{\substack{\Uparrow \\ W}}{p(x)} + \underset{\substack{\| \\ t\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}}}{q(x)}$$

devo avere che $x - t\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ soddisfi equaz. di W:

$$4(x_1 - t) + 3(x_2 - 6t) - 2(x_3 - 2t) = 0$$

trovo $t = \dfrac{4x_1 + 3x_2 - 2x_3}{18}$ e sostituisco

$q(x) = t\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ $p(x) = x - t\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ ...

Sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ $\quad b_i \in \mathbb{R}$

$x_1, \dots, x_n$ incognite.

sist. m equaz. in n incognite.

$A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

matrice (incompleta) $\qquad$ vettore dei termini noti

$(A \; b) \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}$

matrice completa.

Q: - quando esiste soluz?
- quante soluz. ci sono?

Visto: $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $\exists$ soluz. $\iff \exists x$ t.c. $A\cdot x = b$
$\iff b \in \mathrm{Im}(A)$.

<u>Def</u>: data $f: V \to W$ lineare chiamo <u>rango</u> di f
$\mathrm{rank}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

Per $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A)$ = il suo rango come appl.

<u>Oss</u>: le colonne di A generano $\mathrm{Im}(A)$
$\Rightarrow \mathrm{rank}(A)$ = max numero di el. di un insieme di colonne di A che sono un sist. lin. indip.

= "max. numero di col. lin. indip. di A".

Teo (Rouché-Capelli): il sist. $A \cdot x = b$ ha soluz. $\iff$ $\text{rank}(A\ b) = \text{rank}(A)$.

Oss: $\text{rank}(A\ b) = \begin{cases} \text{rank}(A) \\ 1 + \text{rank}(A) \end{cases}$.

Dim: $\exists$ soluz. $\iff b \in \text{Im}(A)$
$\iff b \in \text{Span}(\text{col. di } A)$
$\iff$ aggiungendo b alle col. di A la dim. dello span resta uguale
$\iff \text{rank}(A\ b) = \text{rank}(A)$. $\blacksquare$

Def: il sistema $A \cdot x = b$ $\quad A \in M_{m \times n}$ $\quad b \in \mathbb{R}^m$ è
- omogeneo se $b = 0$
- sottodeterminato se $m < n$ (meno equaz. che inc.)
- quadrato se $m = n$
- sovradeterminato se $m > n$ (più equaz. che inc.)

Dato $A \cdot x = b$ dico che $A \cdot x = 0$ è il sist. omogeneo associato.

Prop: se il sist. $A \cdot x = b$ ha una soluzione $\bar{x}$ allora l'insieme delle soluz. è ottenuto sommando $\bar{x}$ a ciascuna soluz. del sist. omog. associato:

$$\{x\in\mathbb{R}^n : A\cdot x = b\} = \{\bar{x}+y : \ y \text{ t.c. } A\cdot y = 0\}.$$

"La soluz. generica di un sist. lin. si ottiene sommando una soluz. part. alla soluz. generica del sist. omog. assoc."

<u>Dim</u>: $\{x\in\mathbb{R}^n : A\cdot x = b\} = \{x\in\mathbb{R}^n : A\cdot x = A\cdot\bar{x}\}$

$= \{x\in\mathbb{R}^n : A(x-\bar{x}) = 0\} = \{x\in\mathbb{R}^n : x-\bar{x}\in \operatorname{Ker}(A)\}$

$= \{x\in\mathbb{R}^n : \text{posto } y = x-\bar{x} \text{ ho } y\in\operatorname{Ker}(A)\}$

$= \{x\in\mathbb{R}^n : x = \bar{x}+y \text{ con } y\in\operatorname{Ker}(A)\}$

$= \{\bar{x}+y : y\in\operatorname{Ker}(A)\}$

$= \{\bar{x}+y : A\cdot y = 0\}.$ ▨

<u>Oss</u>: $A\in\mathcal{M}_{m\times n}$

$\{x : A\cdot x = 0\} = \operatorname{Ker}(A)$

contiene almeno 0; inoltre se $m<n$ tale $\operatorname{Ker}(A)$ è sttosp. di $\mathbb{R}^n$ di dim $\geq n-m$ ($\Rightarrow$ infiniti elementi).

Quante possono essere le soluz. di sist. lin.:

	omog	non omog
sottodetermin.	sempre ∞ soluz.	nessuna oppure infinite
quadr/sovradet.	una sola oppure ∞	una, nessuna o ∞.

nessuna:

$$\begin{cases} 0\cdot x_1 + \cdots + 0\cdot x_n = 1 \\ \vdots \end{cases}$$

Oss: per risolvere un sistema lo si riconduce a uno equivalente di cui si vedono le soluz.:

- riordinare le equaz.
- moltiplicare una equaz. per $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$
- sommare due equaz.

Oss: se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è invertibile allora $\forall b \in \mathbb{R}^n$ il sistema $A \cdot x = b$ ha la soluz. unica

$$x = A^{-1} \cdot b.$$

Q: quali matr. sono inv?