

SITUAZIONE.

SPAZIO VETTORIALE V

$$\beta = (v_1, \dots, v_m)$$

$$\beta' = (v_1', \dots, v_m')$$

SUPPONIAMO CHE $\forall j$

$$v_j' = \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i$$

$$v_j' = a_{1j} v_1 + a_{2j} v_2 + \dots + a_{mj} v_m$$

In notazione abbreviata, sia

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, m}}$$

$$\rightarrow \beta' = \beta \cdot A$$

NOTAZIONE

$$(\nu_1', \nu_2', \dots, \nu_n') = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Lemma 5.5.3

$$\text{Se } \beta' = \beta \cdot A$$

allora esiste A^{-1} e

$$\beta = \beta' \cdot A^{-1}.$$

Dim Sia $\tilde{A}$ la matrice tale che

$$\beta = \beta' \cdot \tilde{A}$$

Ora

$$A \cdot \tilde{A} = [Id]_{\beta'}^{\beta} [Id]_{\beta}^{\beta'} =$$

$$[Id]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} Id(v_1') = v_1' \\ a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

così è la matrice A ,
per la Prop. 5.5.1

$$\downarrow \\ \cong [Id \circ Id]_{\beta}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Questo dimostra che $\tilde{A} = A^{-1}$. $\square$

Riassumendo.

Sia $f: V \rightarrow W$ applic. lineare.

Siano β e β' basi di V

$\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ basi di W

$$\text{Sia } \beta' = \beta \cdot A$$

$$\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cdot M$$

Allora


$$[f]_{\beta'}^{\mathcal{C}'} = M^{-1} [f]_{\beta}^{\mathcal{C}} \cdot A$$

In fatti:

$$[l]_{\beta'}^{c'} = [Id]_c^{c'} [l]_{\beta}^c [Id]_{\beta'}^{\beta}$$

per la Prop 5.5.1

↑
A

Ricorda inoltre che
 $M = [Id]_{c'}^c$

$$M^{-1} = [Id]_c^{c'}$$

Esempio.

Sia $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\beta = (e_1, e_2)$ la base standard.

$\beta' = (v_1, v_2)$ altra base

dove

$$v_1 = e_1 + e_2$$

$$v_2 = e_1 + 2e_2$$

Proviamo

$$[L]_{\beta}^{\beta} = \begin{pmatrix} L(e_1) & L(e_2) \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ora ci chiediamo:

$$[L]_{\beta'}^{\beta} = ?$$

$$\beta' = \beta \cdot A$$

$$(v_1, v_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\uparrow} \begin{bmatrix} \text{Id} \end{bmatrix}_{\beta'}^{\beta}$$

$$\begin{bmatrix} L \end{bmatrix}_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 per la regola di cambio base. $\begin{bmatrix} L \end{bmatrix}_{\beta}^{\beta}$ A

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo che l'anni, usando la costruzione diretta:

$$\begin{bmatrix} L \end{bmatrix}_{\beta'}^{\beta} = \left(\begin{array}{c|c} L(v_1) & L(v_2) \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right)$$

OK

Dici ora $C = (w_1, w_2)$ altra base
di $\mathbb{R}^2$

$$w_1 = l_1 + 4l_2$$

$$w_2 = 1l_1 + 3l_2$$

Voglio scrivere

$$\begin{bmatrix} C \\ \beta' \end{bmatrix}$$

Nota che

$\downarrow M$

$$C = \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(w_1, w_2) = (l_1, l_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Per applicare la regola di cambiamento
base devo calcolare M^{-1} .

CALCOLIAMOLA COL METODO "ANTICIPATO" GIÀ LA VOLTA SCORSA

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = M^{-1}$$

Verifica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

allora per concludere

$$\begin{aligned}
[L]_{\beta'}^{\mathcal{C}} &= M^{-1} [L]_{\beta'}^{\beta} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -9 & -13 \\ 12 & 17 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$