Algebra lineare 15/11/19

V sp. vett. W, Z sttsp.

$V = W \oplus Z$ se $W \cap Z = \{0\}$ e $W + Z = V$

$\Rightarrow$ ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come

$$v = \underset{\substack{\cap \\ W}}{w} + \underset{\substack{\cap \\ Z}}{z}.$$

Pongo $w = p(v)$, $z = q(v)$; p, q proiezioni.

Prop: 1) p, q lineari

2) $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(q) = Z$, $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p) = W$

3) $p \circ p = p$, $q \circ q = q$, $p \circ q = 0$, $q \circ p = 0$

4) $p + q = id_V$.

Dim: $v_1, v_2 \in V$ $\quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$v_1 = \underset{p(v_1)}{w_1} + \underset{q(v_1)}{z_1}$ $\quad v_2 = \underset{p(v_2)}{w_2} + \underset{q(v_2)}{z_2}$ $\quad w_1, w_2 \in W, z_1, z_2 \in Z$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \underbrace{(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)}_{W} + \underbrace{(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)}_{Z}$$

$\Rightarrow p(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 p(v_1) + \lambda_2 p(v_2)$

$q(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = \lambda_1 q(v_1) + \lambda_2 q(v_2)$

2) Per p:

$\underline{\underline{Im(p) = W}}$: $\underline{Im(p) \subset W}$ ovvio

$\underline{W \subset Im(p)}$ $w = \underset{\overset{\Uparrow}{W}}{w} + \underset{\overset{\Uparrow}{Z}}{0}$

$\Longrightarrow p(w) = w \Longrightarrow w \in Im(p)$

$\underline{\underline{Ker(p) = Z}}$: $\underline{Ker(p) \subset Z}$

$v \in Ker(p) \Longrightarrow v = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{p(v)} + \underset{\overset{\Uparrow}{Z}}{q(v)}$

$\Longrightarrow v \in Z$

$Z \subset Ker(p)$ $z = \underset{\overset{\Uparrow}{W}}{0} + \underset{\overset{\Uparrow}{Z}}{z}$

$\Longrightarrow p(z) = 0.$

3) $\underline{p \circ p = p}$ Visto sopra che $p(w) = w$ $\forall w \in W$

Ma se $v \in V$ ho $p(v) \in W$

$\Longrightarrow p(p(v)) = p(v).$

$q \circ q = q$ ✓

$p \circ q = 0$ $Ker(p) = Im(q)$

$q \circ p = 0$ ✓

4) $p + q = id_V$ $p(v) + q(v) = id_V(v) = v.$ ∎

Es: $V=\mathbb{R}^3$ $\quad W=\{x\in\mathbb{R}^3 : 3x_1-5x_2+8x_3=0\}$

$Z=\mathrm{Span}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Trovare le matrici P, Q delle proiezioni p, q verificando $P\cdot P=P$ e $Q\cdot Q=Q$.

$\dim(W)=2$, $\dim(Z)=1$, $2+1=3$;

$W\cap Z=\{0\}$ ok: il gen. di Z non soddisfa l'equaz. di W.

$\Longrightarrow \mathbb{R}^3=W\oplus Z$.

Cerco p, q: dato $x\in\mathbb{R}^3$ devo scrivere

$x=w+z \qquad w\in W,\ z\in Z$

e avrò $w=p(x)$, $z=q(x)$;

Dato x cerco $w\in W$, $z\in Z$ t.c.

$$x=w+z$$

deve soddisfare l'equaz. di W

deve essere $z=t\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$

cioè cerco t t.c. $x-t\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-4t\\x_2-t\\x_3+t\end{pmatrix}$ soddisf. l'equaz. di W:

$$3(x_1-4t)-5(x_2-t)+8(x_3+t)=0$$

$$3x_1\underline{-12t}-5x_2\underline{+5t}+8x_3\underline{+8t}=0$$

$$t = -3x_1 + 5x_2 - 8x_3$$

$$\Rightarrow q(x) = (-3x_1+5x_2-8x_3)\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}-12 & +20 & -32\\ -3 & +5 & -8\\ 3 & -5 & 8\end{pmatrix}}_{Q}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$p(x) = x - q(x) = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - (-3x_1+5x_2-8x_3)\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= id_{\mathbb{R}^3}(x) - q(x) \qquad [p+q = id_{\mathbb{R}^3}]$$

$$= I_3\cdot x - Q\cdot x = (I_3 - Q)\cdot x$$

$$P = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - Q = \begin{pmatrix}13 & -20 & 32\\ 3 & -4 & 8\\ -3 & 5 & -7\end{pmatrix}$$

$Q\cdot Q = Q$ facile:

Provare anche che $Q\cdot P = P\cdot Q = 0$

$$P\cdot P = P: \begin{pmatrix}13 & -20 & 32\\ 3 & -4 & 8\\ -3 & 5 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}13 & -20 & 32\\ 3 & -4 & 8\\ -3 & 5 & -7\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}169-60-96 & -260+80+160 & * \\ 39-12-24 & * & * \\ * & 60-20-35 & *\end{pmatrix}$$

Scoperto: se p è una proiez. rispetto a $\oplus$ allora $p\circ p = p$. Viceversa:

Prop: data $p: V \to V$ lin. t.c. $p \circ p = p$ esiste una deco $V = W \oplus Z$ t.c. p è la associata proiez su W.

Dim: Pongo $W = Im(p)$, $Z = Ker(p)$ e provo che $V = W \oplus Z$ e p è la proiez. su W.

$W \cap Z = \{0\}$: prendo $v \in W \cap Z = Im(p) \cap Ker(p)$

$\Rightarrow v = p(u)$, $p(v) = 0$

$\Rightarrow \underset{\overset{\|}{0}}{p(v)} = p(p(u)) = (p \circ p)(u) = p(u) = v$

ok

$W + Z = V$: dato $v \in V$ devo scrivere

$$v = \underset{\overset{\cap}{Im(p)}}{w} + \underset{\overset{\cap}{Ker(p)}}{z}$$

voglio inoltre che la proiez. su W sia p:
unica scelta: $w = p(v)$

$z = v - p(v)$.

Va bene poiché: $p(v) \in Im(p)$ ✓

$v - p(v) \in Ker(p)$: $p(v - p(v)) = p(v) - p(p(v))$

$= p(v) - (p \circ p)(v) = p(v) - p(v) = 0$. ▨

$\boxed{5.2.10}$ $V=\mathbb{R}^3$ $W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\dim = 2$

$Z = \left\{ x : \begin{matrix} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$. $\dim = 1$

$2+1=3 \Rightarrow$ basta vedere che $\underbrace{W \cap Z = \{0\}}_{\text{più facile}}$ oppure $W+Z=\mathbb{R}^3$.

devo comunque farlo per trovare P, Q

Dato $x \in \mathbb{R}^3$ devo scrivere

$$x = w + z$$

w: $t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

z: deve soddisfare le equaz. di Z

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - t - 2s \\ x_2 - 2t + s \\ x_3 - 3t - s \end{pmatrix}$ deve soddisfare equaz. di Z:

$$\begin{cases} 2(x_1 - t - 2s) - (x_2 - 2t + s) + (x_3 - 3t - s) = 0 \\ 3(x_1 - t - 2s) + (x_2 - 2t + s) - 2(x_3 - 3t - s) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2t + 2t - 3t - 4s - s - s = -2x_1 + x_2 - x_3 \\ -3t - 2t + 6t - 6s + s + 2s = -3x_1 - x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} +3t + 6s = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ t - 3s = -3x_1 - x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 3s - 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 9s - 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 6s = 2x_1 - x_2 + x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \frac{1}{15}(11x_1 + 2x_2 - 5x_3) \\ t = \frac{1}{5}(11x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 15x_1 - 5x_2 + 10x_3) = \frac{1}{5}(-4x_1 - 3x_2 + 5x_3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{1}{5}(-4x_1 - 3x_2 + 5x_3)\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix} + \frac{1}{15}(11x_1 + 2x_2 - 5x_3)\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{15}\begin{pmatrix}10 & -5 & 5\\ * & * & * \\ * & * & *\end{pmatrix}}_{P}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$Q = I_3 - P$$

Verificare che $P \cdot P = P \qquad P \cdot Q = 0$

$\qquad Q \cdot P = 0 \qquad Q \cdot Q = Q.$

—— o ——

Q: come cambiano $[v]_{\mathcal{B}}$ cambiando $\mathcal{B}$

come cambia $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ cambiando $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

Definizione alternativa sintetica di $[v]_{\mathcal{B}}$ e $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$; $[v]_{\mathcal{B}} = x = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$ se $v = \underbrace{x_1 v_1 + \dots + x_n v_n}_{(v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}}$

nuovo · che si comporta come prod. righe x col.

le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$ sono quel vettore t.c.

$$\boxed{v = \mathcal{B} \cdot [v]_{\mathcal{B}}}$$

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ $\quad$ $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ $\quad$ $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}$

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j = a_{1i} w_1 + \dots + a_{mi} w_m$$
$$= (w_1, \dots, w_m) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

$$\big(f(v_1), \dots, f(v_n)\big) = \underbrace{(w_1, \dots, w_m)}_{\mathcal{C}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}}$$

$$\| $$

$$f \cdot \underbrace{(v_1, \dots, v_n)}_{\mathcal{B}}$$

nuovo ma...

nuovo ma...

Def. sintetica: la matrice associata a $f: V \to W$ lin. rispetto a basi $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{C}$ di W è quella matrice t.c.

$$\boxed{f \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}}$$

$$\boxed{v = \mathcal{B} \cdot [v]_{\mathcal{B}}}$$

Oss: se $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{M}_{m \times n}$

$\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m) \in \mathcal{M}_{m \times m}$

e in tal caso i prodotti sono i prod. righe x col.

<u>Visto</u>: $[f(v)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$ usando $x = \dots$ $A = \dots$

<u>Rivediamo</u>: $f(v) = f \cdot (\mathcal{B} \cdot [v]_{\mathcal{B}}) = (f \cdot \mathcal{B}) \cdot [v]_{\mathcal{B}}$

$= (\mathcal{C} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) \cdot [v]_{\mathcal{B}} = \mathcal{C} \cdot ([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot [v]_{\mathcal{B}})$

$\Longrightarrow [f(v)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$.

<u>Visto</u>: $[g \circ f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = [g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ usando $A = \dots$

<u>Rivediamo</u>:

$$\boxed{f \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}}$$

$(g \circ f) \cdot \mathcal{B} = (g \cdot f) \cdot \mathcal{B} = g \cdot (f \cdot \mathcal{B}) = g \cdot (\mathcal{C} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})$

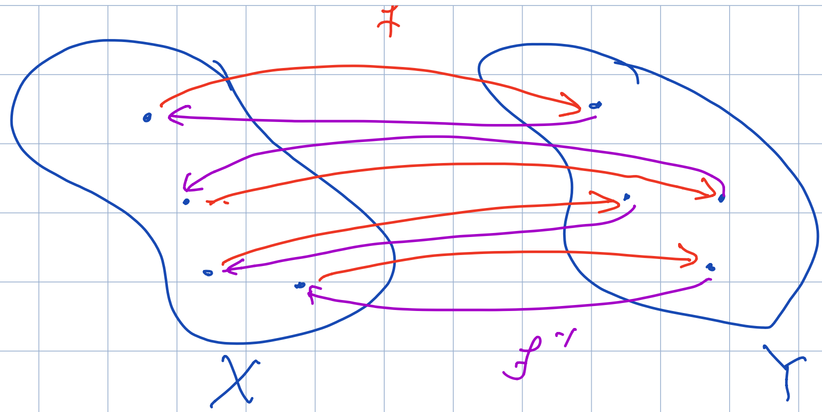
$= (g \cdot \mathcal{C}) \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (\mathcal{D} \cdot [g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}) \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

$= \mathcal{D} \cdot ([g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})$.

$\Longrightarrow [g \circ f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = [g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

—— o ——

X, Y insiemi, $f : X \to Y$ si dice invertibile se esiste una $g : Y \to X$ t.c. $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$.
Tale g è unica, detta inversa, indicata con f^{-1}.



<u>Fatto:</u> f invertibile se e solo se è bigettiva.

<u>Prop:</u> Dati V, W sp. vett. di $\dim < +\infty$

(1) Se esiste $f: V \to W$ lineare invertibile allora $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(W)$ e f^{-1} è lineare.

(2) Se $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(W)$ allora $f: V \to W$ lin. è iniettiva $\Longleftrightarrow$ è surgettiva; inoltre data $g: V \to W$ lineare

$$g \circ f = id_V \Longleftrightarrow f \circ g = id_W$$

(1) Se dim. diverse : no bigettive lineari

(2) Per applicaz. lin. tra dim. uguali

½ def. invertibile $\Longrightarrow$ altra ½

½ def. inversa $\Longrightarrow$ altra ½ .

<u>Dim:</u> (1) $\underset{0}{\underset{\parallel}{\dim(Ker(f))}} + \underset{\dim(W)}{\underset{\parallel}{\dim(Im(f))}} = \dim(V)$

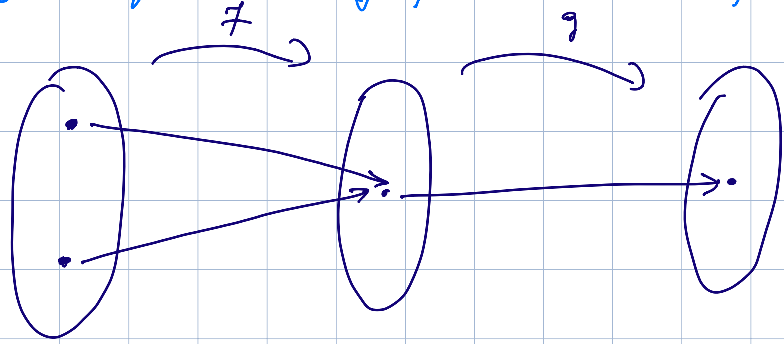
(2) (*) iniettiva $\Longleftrightarrow$ surgettiva ; $n = \dim(V) = \dim(W)$

$$\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = n$$

iniettiva $\iff \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$

surgettiva $\iff \dim(\mathrm{Im}(f)) = n$ ...

(••) $g \circ f = id_V \implies g \circ f$ iniettiva $\implies f$ iniettiva



$\implies \exists\, f^{-1} : W \to V$ t.c. $f \circ f^{-1} = id_W$

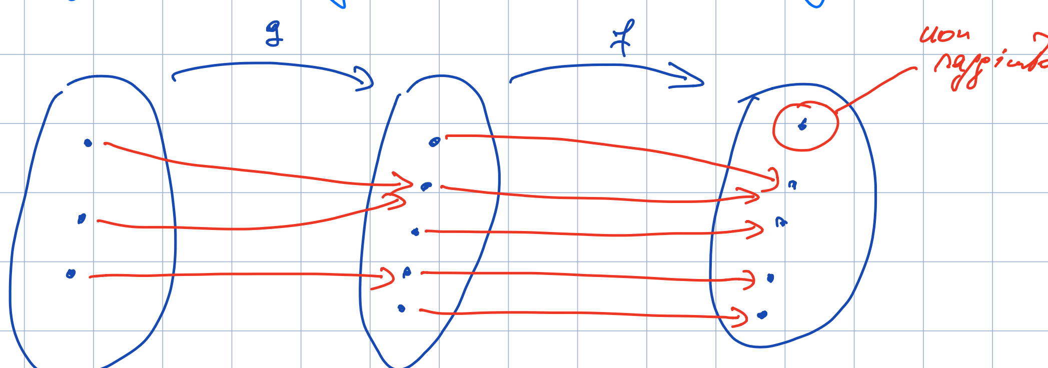
$$\implies (g \circ f) \circ f^{-1} = id_V \circ f^{-1}$$

$$id_V \circ f^{-1} = f^{-1}$$

$$(g \circ f) \circ f^{-1} = g \circ (f \circ f^{-1}) = g \circ id_W = g$$

OK.

$f \circ g = id_W \implies f \circ g$ surgettiva $\implies f$ surgettiva



$$\Rightarrow \quad \exists f^{-1}: W \to U \quad \text{t.c.} \quad f^{-1} \circ f = id_V$$

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ (f \circ g) &= f^{-1} \circ id_W = f^{-1} \\ &\| \\ (f^{-1} \circ f) \circ g & \\ &\| \\ id_V \circ g & \\ &\| \\ g & \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Per matrici.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \qquad I_n \cdot x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

I_n come funz. è $id_{\mathbb{R}^n}$

Prodotto tra matrici $\longleftrightarrow$ composiz. come appl. lin.

Dunque:

(1) $A \in M_{m \times n}$ può essere invertibile solo se $m = n$

(2) $A \in M_{n \times n}$ è invertibile se esiste B t.c. $A \cdot B = I_n$ e $B \cdot A = I_n$.

Tale B è unica, detta inversa di A, indicata A^{-1}.

Inoltre data $A \in M_{n \times n}$ ho

$$A \cdot B = I_n \Longleftrightarrow B \cdot A = I_n.$$