ES 5.4.1

Siano V e W sp vett di dim finita.

a) Dim che se $\dim V \geq \dim W$ allora esistono $f: V \to W$ lineari SURGETTIVE.

b) Dimostrare inoltre che se $f: V \to W$ è SU allora $\exists\, g: W \to V$ t.c. $f \circ g = Id_W$.

<u>Dim</u> a) Sia $v_1, , v_n$ base di V

e $w_1, , w_m$ base di W

Con $n \geq m$.

Costruiamo una f lineare imponendo

$$f(v_1) = w_1$$
$$f(v_2) = w_2$$

$$f(v_m) = w_m$$
$$f(v_{m+1}) = 0$$

$$f(v_n) = 0$$

f è ben definita perchè ho dato i valori $f(v_i)$ sugli elementi della base $v_1, , v_n$.

f è SU perchè

$$w_1, w_2, \ , w_m \in \operatorname{Im} f$$

e allora $\operatorname{Im} f$ contiene una base di W.

Dunque $W \subseteq \operatorname{Im} f \subseteq W$ quindi

$$\operatorname{Im} f = W.$$

b) Sia $f: V \to W$ surgettiva.

Sia $w_1, , w_m$ base di W.

Poichè f è SU

$\exists \ v_1 \in V$ t.c. $f(v_1) = w_1$

$v_2 \in V$ t.c. $f(v_2) = w_2$

$$\dots\dots\dots$$

$$\exists \ v_n \in V \text{ tc } f(v_n) = w_n$$

Definiamo $g : W \to V$ lineare

ponendo

$$g(w_1) = v_1$$
$$g(w_2) = v_2$$
$$\vdots$$
$$g(w_n) = v_n$$

g è ben definita perché $w_1, \dots, w_n$ è base di W.

Ora calcolo

$$f \circ g\, (w_1) = f(v_1) = w_1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f \circ g\, (w_n) = f(v_n) = w_n$$

La $f \circ g$ coincide con Id_W su $w_1, , w_m$ cioè

$$f \circ g = Id_W$$

Es 5.4.3 a) Trovare M con coeff tutti $\neq 0$ tale che.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2×3 $\qquad$ 3×2

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4a - b + 2c = 1 \\ 5a + 3b - 7c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -1 + 4a + 2c \\ 5a - 3 + 12a + 6c - 7c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -1 + 4a + 2c \\ 17a - c = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -1 + 4a + 34a - 6 \\ c = 17a - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 38a - 7 \\ c = 17a - 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 38a - 7 \\ 17a - 3 \end{pmatrix}$$ scelgo $a = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 31 \\ 14 \end{pmatrix}$$ è la prima colonna di M

$$\begin{cases} 4d - e + 2f = 0 \\ 5d + 3e - 7f = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e = +4d + 2f \\ 5d + 12d + 6f - 7f = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e = 4d + 2f \\ 17d - f = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e = 4d + 34d - 2 = 38d - 2 \\ f = 17d - 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 38d-2 \\ 17d-1 \end{pmatrix}$$ scelgo $d=1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 36 \\ 16 \end{pmatrix}$$ è la seconda colonna di M

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 31 & 36 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}$$

b) Trovare N con coeff tutti $\neq 0$ tc

$$N \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \qquad\qquad 3 \times 2$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed è analogo al precedente: A VOI!

5.4.4 b)

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da.

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 - x_2 \\ 5x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

Sia $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$

Sia $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

verificare che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ rispettivamente e trovare

$$[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

$\mathcal{B}$ è base perché i suoi due vettori sono lin INDIP

$\uparrow$

sono lin INDIP perché $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ non è un multiplo di $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

C è base perché è costituito da $\underline{\underline{3}}$ vettori e basta mostrare una solo delle due seguenti proprietà:

- generano
- sono lin indip.

Mostriamo che generano. Devo mostrare che

$$\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^3$$

come osservato in una scorsa esercitazione.

$$\operatorname{Span}\left(\overset{v_1}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}, \overset{v_3}{\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}}\right) =$$

$$= \operatorname{Span}\left(\underset{v_1}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{v_3+v_2}{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}}\right) =$$

$$= \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

continuando

$$= \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^3$$

Calcolo

$$[f]_{\beta}^{C} = \begin{array}{c} \begin{matrix} f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} & f\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcolo $f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

Devo scrivere

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{rispetto alla base } \mathcal{C}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

l'unica soluzione è

$\alpha = 5 \quad \beta = 1 \quad \gamma = 1$

per cui

$$[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} 5 & \\ \hline 1 & \\ \hline 1 & \end{array}\right)$$

Calcolo

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \\ 35 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 4 \\ 35 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

l'unica sol è

$$\alpha = 40 \qquad \beta = -5 \qquad \gamma = -18$$

$$[f]^{C}_{\beta} = \begin{pmatrix} 5 & 40 \\ 1 & -5 \\ 1 & -18 \end{pmatrix}$$

---

es 5.4.5 V dim n

W dim m

sottospazio $X \subset V$

$\uparrow$ dim K

sottospazio $Y \subset W$

$\uparrow$

$|$
dim h

Dim che

$$\Gamma = \{ f : \mathcal{L}(V, W) \text{ t.c. } f(X) \subseteq Y \}$$

è un s. spazio di $\mathcal{L}(V, W)$ e calcolarne la dimensione.

Vedi SOTTO

Svolgimento Supponiamo di sapere che Γ è un s. spazio.
Calcoliamo la dimensione.

Sia $v_1, , v_k$ base di X

la completo a una base di V

$v_1, , \underline{\underline{v_k}}, v_{k+1}, , v_n$

Sia $w_1, , w_h$ base di Y

la completo a una base di W

$w_1, , \underline{\underline{w_h}}, w_{h+1}, , \underline{\underline{w_m}}$

Le applicazioni lineari presenti in Γ

rispetto a queste basi hanno matrice della seguente forma. Sia $f \in \Gamma$

$$[f]^{W_1 \quad W_m}_{V_1 \quad V_n} = h \begin{array}{c} \begin{matrix} f(v_1) & & f(v_k) & f(v_{k+1}) & & f(v_n) \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right) \end{array}$$

$(m-h) \times k$

Una base di Γ è data dalle applicazioni la cui matrice è

E_{ij} però escludendo

le E_{ij} con $i > h$ e $j \leq k$

La dim di Γ dunque è $n \cdot m - (m-h) \cdot k$.

Per mostrare che Γ è un s. spazio.

- Sia $f \in \Gamma$, $g \in \Gamma$

  $f+g \overset{?}{\in} \Gamma$

  Sia $x \in X$ verifico

  $$(f+g)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in Y} + \underbrace{g(x)}_{\in Y}$$

  dunque $\in Y$ perché Y è s. spazio di W

- l'applic nulla $\in \Gamma$ (banale)

- Sia $f \in \Gamma$ sia $\lambda \in \mathbb{R}$ allora

  $\lambda f \overset{?}{\in} \Gamma$

  (facile).

5.4.9

Sia $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$ base di $\mathbb{R}^2$

sia $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

base di $\mathbb{R}^3$

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$$

A) Calcolare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

B) Dato $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ calcolare $[v]_{\mathcal{B}}$

C) Verificare

$$[f(v)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} [v]_{\mathcal{B}}$$

A) $f\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-31\\13\\-18\end{pmatrix}$ $f\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-19\\8\\-11\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-31\\13\\-18\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4\alpha + \beta - 2\gamma = -31 \\ \alpha + \beta = 13 \\ 2\beta + \gamma = -18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 52 \cancel{-4\beta} + \beta + 36 \cancel{+4\beta} = -31 \\ \alpha = 13 - \beta \\ \gamma = -18 - 2\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = -119 \\ \alpha = 132 \\ \gamma = 220 \end{cases}$$

$$[f]_{\beta}^{C} = \left(\begin{array}{c|c} 132 & \\ \hline -119 & \\ \hline 220 & \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} -19 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4\alpha + \beta - 2\gamma = -19 \\ \alpha + \beta = 8 \\ 2\beta + \gamma = -11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32 \cancel{-4\beta} + \beta + 22 \cancel{+4\beta} = -19 \\ \alpha = 8 - \beta \\ \gamma = -11 - 2\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = -73 \\ \alpha = 81 \end{cases}$$

$$\gamma = 135$$

$$[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 132 & 81 \\ -119 & -73 \\ 220 & 135 \end{pmatrix}$$

B)

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Invece di risolvere il sistema in maniera tradizionale, potremmo moltiplicare a sinistra entrambi i membri per l'inversa di $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$.

REGOLETTA

LA VEDRETE PIÙ AVANTI

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la sua inversa

esiste se e solo se $ad - bc \neq 0$.

e in tal caso è

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Nel caso di $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Per risolvere il sistema moltiplico per l'inversa a sinistra e a destra

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dunque $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -30 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\right]_{\beta} = \begin{pmatrix}19\\-30\end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix}132 & 81\\-119 & -73\\220 & 135\end{pmatrix}\begin{pmatrix}19\\-30\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}78\\-71\\130\end{pmatrix}$$

Verifichiamo che coincide con

$$\left[f\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\right]_C =$$

$$= \left[\begin{pmatrix}-19\\7\\-12\end{pmatrix}\right]_C =$$

$$\begin{pmatrix} -19 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$312 - 71 - 260$$

$$78 - 71 + 0 = 7$$

$$-71 \cdot 2 + 130 = -12 \quad \text{OK}$$