

Algebra lineare 12/11/19

V, W sp. vett. $\mathcal{L}(V, W) = \{f: V \rightarrow W \text{ lin}\}$ sp. vett.

Fatto: $M_{m \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$
 $A \longmapsto f_A \quad f_A(x) = A \cdot x$
bijezione lineare.

Conseguenza: usando B per identif. con V a $\mathbb{R}^n$
e C per identif. con W a $\mathbb{R}^m$ ho
identificazione di $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(V, W)$ con $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Def: date basi $B = (v_1, \dots, v_n)$ di V e $C = (w_1, \dots, w_m)$ di W
chiamo matrice associata a $f: V \rightarrow W$ lineare la matrice
 A b.c. $f(v_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} w_j$. Le indico:

$[f]_{CB}$
← base in arrivo.
← base in partenza

Prop: l'applicazione $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(V, W) \longrightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})$
 $f \longmapsto [f]_{CB}$
è biiezione lineare.

(E esattamente la identificazione sopra indicata.)

$$B = (v_1, \dots, v_m) \quad C = (w_1, \dots, w_m) \quad f(v_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} w_j \quad i=1, \dots, m$$

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = i\text{-esima colonna di } A = [f]_B^C.$$

La trova così: applico f alla i -esima ed. delle base in partenza e mi trovo la coord. rispetto alle base in arrivo.

Es: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x) = \begin{pmatrix} 5x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 \end{pmatrix}$

$$B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \quad C = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Trova $[f]_B^C$. $[f]_B^C = \begin{pmatrix} -137 & \cdot & 913 \\ -84 & \cdot & 923 \end{pmatrix}$

I col: $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 10 + 2 + 28 \\ 8 - 3 - 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -31 \end{pmatrix} = \boxed{-137} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \boxed{-84} \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

II col...

III col: $f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -5 - 8 + 49 \\ -4 + 12 - 63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -55 \end{pmatrix} = \boxed{913} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \boxed{923} \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

Oss: abbiamo $M_{m \times n} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$
 $A \mapsto f_A = A$

Nell'esempio: f è quella associata a $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 4 & 3 & -9 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 4 & 3 & -9 \end{pmatrix} \mapsto f \mapsto [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -137 & * & * \\ -84 & * & * \end{pmatrix}$$

non è quella di partenza
perché ho usato basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$
qualsiasi.

Queda:

Fatto: $[f_A]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = A$.

Visto: $f_A(e_i^{(m)}) = i\text{-esima colonna di } A = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$
 $= \sum_{j=1}^m a_{ji} e_j^{(m)}$

cioè la i -esima colonna di $[f_A]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ è
la i -esima colonna di A .

Es: $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

$Y = \{y \in \mathbb{R}^3 : 2y_1 - y_2 + 5y_3 = 0\}$

$f: X \rightarrow Y$

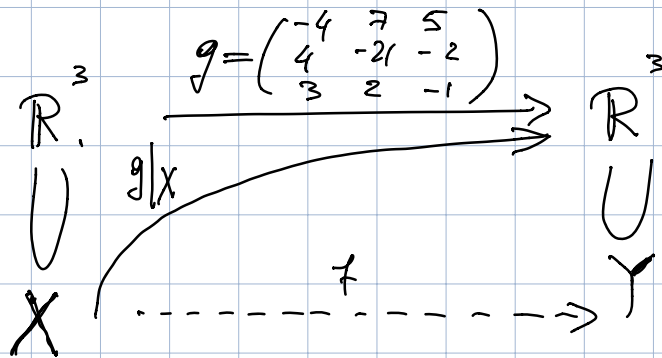
$$f(x) = \begin{pmatrix} -4x_1 + 7x_2 + 5x_3 \\ 4x_1 + 21x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

1) Dimostrare che f è lineare

2) Trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ con...

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Guardando solo questa formula si può pensare che f sia l'applicaz. $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} -4 & 7 & 5 \\ 4 & +21 & +2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.



$g|_X$ = restrizione di g al sottoinsieme X del dom. di g .

Definendo X, Y, g con altre formule a caso non si ottiene una $f: X \rightarrow Y$; se però verifico che $g(x) \in Y \quad \forall x \in X$ ho invece una tale f ($g|_X^Y$ = abbreviazione di $g|_X$ al sottoinsieme Y del codominio)

Una volta verificato che $f(x) \in Y \quad \forall x \in X$ ho la $f: X \rightarrow Y$ che visto come funzione ed è ovvio che è lineare poiché è definita dalla stessa formula che definisce g .

$$X = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^3 : 2y_1 - y_2 + 5y_3 = 0\}$$

$$f: X \rightarrow Y$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} -4x_1 + 7x_2 + 5x_3 \\ 4x_1 + 21x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

Mostro che $g(x) \in Y \quad \forall x \in X$: devo vedere che

$$2 \underbrace{(-4x_1 + 7x_2 + 5x_3)}_{y_1} - \underbrace{(4x_1 + 21x_2 + 2x_3)}_{y_2} + 5 \underbrace{(3x_1 + 2x_2 - x_3)}_{y_3} = 0 \quad \forall x \in X$$

$$(-8 - 4 + 15)x_1 + (14 - 21 + 10)x_2 + (10 - 2 - 5)x_3 = 0 \quad \forall x \in X$$

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \quad \forall x \in X \quad \underline{\underline{\Sigma}}$$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} : \text{I col: } f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -11 \\ -17 \\ 1 \end{pmatrix} = -11 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{II col: } f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -9 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -11 & -9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{non } \begin{pmatrix} -11 & 1 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Ricordo: $\forall X$ insieme, ho funzione identità

$$\text{id}_X : X \rightarrow X$$

$$x \mapsto x.$$

Def: chiamo matrice identità $m \times m$ la $I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \ddots & 1 \end{pmatrix}$.

Oss: $I_m \cdot e_i^{(m)} = i\text{-esima col. di } I_m = e_i^{(m)}$
 $\Rightarrow$ l'applicazione associata a I_m è $\text{id}_{\mathbb{R}^m}$.

Ese: $\forall A \in M_{m \times n}, A \cdot I_m = A, I_n \cdot A = A.$

Appena visto: $f: \underset{\mathcal{B}}{V} \rightarrow \underset{\mathcal{C}}{W} \rightsquigarrow [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

Prop 1: $[f(v)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}.$

Prop 2: $\underset{\mathcal{B}}{V} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{C}}{W} \xrightarrow{g} \underset{\mathcal{D}}{Z}, [g \circ f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = [g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}.$

L'associazione di una matrice a una applicaz. è naturale:

- 1) l'azione di f sui vettori corrisponde all'azione della matrice sulle coordinate
- 2) la composizione di applicaz. corrisponde al prodotto righe $\times$ col. tra matrici.

$\Rightarrow$ VERO PUR DI USARE BASI COMPATIBILI

Dimo 1: $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n), \mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m), A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$
 $f(v_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} w_j$; diammo $x = [v]_{\mathcal{B}}$;

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^m a_{ji} w_j \\ &= \sum_{j=1}^m \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i\right)}_{(A \cdot x)_j} \cdot w_j \end{aligned} \quad \Rightarrow [f(v)]_{\mathcal{C}} = A \cdot x. \quad \square$$

Dimo 2: $B = (v_1, \dots, v_n)$ $C = (w_1, \dots, w_m)$ $D = (z_1, \dots, z_p)$

$$A = [f]_{CB}^C \quad f(v_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} w_j$$

$$T = [g]_{CD}^D \quad g(w_j) = \sum_{k=1}^p t_{kj} z_k$$

$$(g \circ f)(v_i) = g(f(v_i)) = g\left(\sum_{j=1}^m a_{ji} w_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^m a_{ji} \sum_{k=1}^p t_{kj} z_k = \sum_{k=1}^p \underbrace{\left(\sum_{j=1}^m t_{kj} a_{ji}\right)}_{(T \cdot A)_{ki}} z_k$$

$$\Rightarrow [g \circ f]_{CB}^D = T \cdot A.$$



Somma diretta e proiezioni.

Def: dato V sp. vett. e suoi sottospazi W, Z
 dico che V è somma diretta di W e Z , scrivo

$$V = W \oplus Z$$

$$\text{se } W \cap Z = \{0\} \text{ e } W + Z = V.$$

Grassmann: $\dim(W \cap Z) + \dim(W + Z) = \dim(V).$

• Se $V = W \oplus Z$ ho $\dim(W \cap Z) = 0$

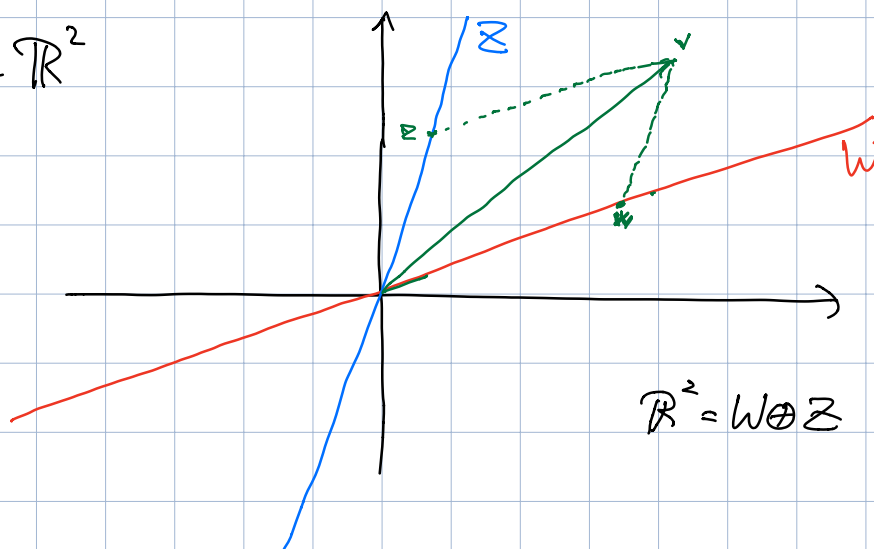
e $\dim(W + Z) = \dim(W) + \dim(Z) \Rightarrow \dim(W) + \dim(Z) = \dim(V)$

• Se $\dim(W) + \dim(Z) = \dim(V)$ allora

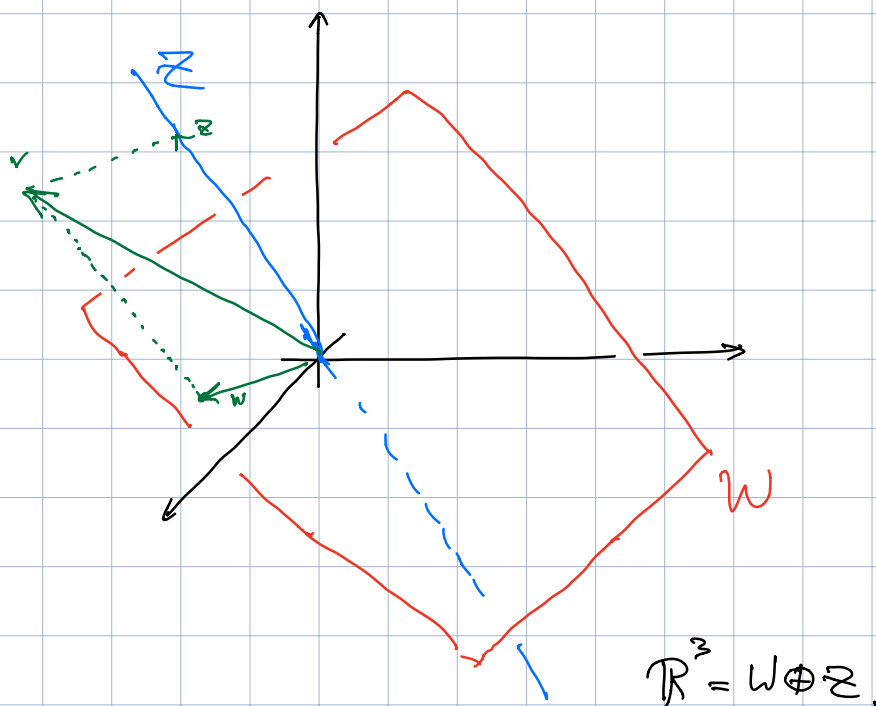
$$W \cap Z = \{0\} \iff W + Z = V.$$

cioè: se W e Z hanno già le dimensioni giuste per dare V come $\oplus$, basta verificare se esse del tutto o in parte coprono l'altra parte (in pratica: conviene $W \cap Z = \{0\}$).

Es: $V = \mathbb{R}^2$



Es: $V = \mathbb{R}^3$



Prop: se $V = W \oplus Z$ allora ogni $v \in V$ si scrive
in modo unico come
$$v = \underbrace{w}_W + \underbrace{z}_Z.$$

Dimo: esistenza: $W + Z = \{w + z: \dots\} \subseteq V$ da $W + Z = V$.

Unicità: $v = w_1 + z_1 = w_2 + z_2$

$$\Rightarrow \underbrace{w_1 - w_2}_W = \underbrace{z_2 - z_1}_Z$$

$$\Rightarrow w_1 - w_2 = z_2 - z_1 \in W \cap Z = \{0\}$$

$$\Rightarrow w_1 - w_2 = z_2 - z_1 = 0$$

$$\Rightarrow w_2 = w_1, z_2 = z_1.$$

□

Prop/Def: se $V = W \oplus Z$ per ogni $v \in V$, scritto $v = \underbrace{w}_W + \underbrace{z}_Z$
pongo $p(v) = w$, $q(v) = z$.

Allora tali $p, q: V \rightarrow V$ sono lineari; sono
dette proiezioni associate alla decomposizione $V = W \oplus Z$.

Quattro:

$$1) \text{ Ker}(p) = \text{Im}(q) = Z; \text{ Ker}(q) = \text{Im}(p) = W$$

$$2) p \circ p = p, q \circ q = q, p \circ q = q \circ p = 0$$

$$3) p + q = \text{id}_V.$$

Esempio: $V = \mathbb{R}^2$ $U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ $Z = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$
 $\mathbb{R}^2 \cong W \oplus Z$.

Dato $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cerco $p(v), q(v)$ cioè $p(v) = w \in W$
 $q(v) = z \in Z$
 l.c. $v = w + z$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\uparrow} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \boxed{\uparrow} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{4x-3y}{11}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}$$

$p(v)$

$$\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 8x-6y \\ -4x+3y \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathbb{P}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\frac{2x+6y}{11}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}$$

$q(v)$

$$\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6x+3y \\ 8x+4y \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbb{Q}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Enunciato: $p \circ p = p$ $q \circ q = q$ $p \circ q = q \circ p = 0$

Visto: componiz. applicaz. $\leftrightarrow$ prodotti matrici.

Esercizio: $\mathbb{P} \cdot \mathbb{P} = \mathbb{P}$, $\mathbb{Q} \cdot \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$
 $\mathbb{P} \cdot \mathbb{Q} = 0$, $\mathbb{Q} \cdot \mathbb{P} = 0$.