Algebra Lineare 6/11/19

V, W sp. vett. $\quad f: V \to W$ lineare se rispetta le comb. lin.

$\mathcal{L}(V,W) = \{ f: V \to W \text{ lineare} \}$ sp. vett.

Visto: $A \in M_{m \times n}$ $\quad f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare.
$x \longmapsto A \cdot x$

Prop: l'applicazione $F : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ è lineare e bijettiva.

"Quindi $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ è $M_{m\times n}(\mathbb{R})$"

Dim: lineare $\quad \underbrace{F(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)}_{\text{funzione } \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m} = \underbrace{\lambda_1 F(A_1) + \lambda_2 F(A_2)}_{\text{funzione } \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m}$

Devo vedere che

$$F(\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2)(x) = (\lambda_1 \cdot F(A_1) + \lambda_2 \cdot F(A_2))(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$(\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2) \cdot x \qquad\qquad \lambda_1 \cdot F(A_1)(x) + \lambda_2 \cdot F(A_2)(x)$$

$$\lambda_1 \cdot A_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot A_2 \cdot x \qquad\qquad \lambda_1 \cdot A_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot A_2 \cdot x$$

OK

iniettiva: basta vedere che $\ker(F) = \{0\}$; suppongo che $F(A) = 0$, devo vedere che $A = 0$.

$F(A) = 0$ significa $F(A)(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow A \cdot x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \underbrace{A \cdot e_i}_{\text{i-esima colonna di } A} = 0 \quad \forall i = 1 \dots n \quad \Rightarrow A = 0.$

<u>suriettiva</u>: data $\underline{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m}$ lineare cerco A t.c. $f = F(A)$ cioè $f = f_A$ cioè $f(x) = A \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.
Per quanto visto ciò può funzionare <u>solo</u> se la i-esima colonna di A è $f(e_i)$; dunque definisco A così e poi verifico che vada bene $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

$$\underset{\mathbb{R}^m}{f(e_i^{(n)})} = \underset{\mathbb{R}^m}{\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}} = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \cdot e_j^{(m)} .$$

con queste formule definisco i coeff a_{ji}

Pongo ora $A = (a_{ji})_{\substack{j=1\dots m \\ i=1\dots n}}$ e verifico che

$$f(x) = A \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \cdot e_1^{(n)} + x_2 \cdot e_2^{(n)} + \dots + x_n e_n^{(n)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i^{(n)}$$

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(e_i^{(n)})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \, e_j^{(m)} = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot x_i\right) \cdot e_j^{m}$$

$(A\cdot x)_j$

vettore di $\mathbb{R}^m$ le cui coord. j-esime è $(A\cdot x)_j$
$\Longrightarrow$ è $A\cdot x$. $\square$

Ripeto: $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \ni A \longleftrightarrow f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ lin. biiettiva
quindi identifica tra loro questi sp. vett.

Fatto: scriveremo A invece che f_A

tabella rett. di numeri

funzione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Ha senso perché vale:

$$f_A \circ f_B = f_{A\cdot B}$$

dunque scrivendo A invece che f_A ho che la composizione di due matrici viste come applicazioni è il loro prodotto come matrici.

Devo vedere che:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^k \arrow[r, "f_B"] \arrow[rr, bend left, "f_{A\cdot B}"] \arrow[rr, bend right, "f_A\circ f_B"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_A"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Cioè: $\quad f_{A\cdot B}(x) = (f_A \circ f_B)(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^k$

$$f_{A\cdot B}(x) = f_A(f_B(x))$$

$$f_{A\cdot B}(x) = f_A(B\cdot x)$$

$$\underbrace{\underbrace{(\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times k}{B})}_{m\times k}\cdot\underset{k\times 1}{x}}_{m\times 1} = \underbrace{\underset{m\times n}{A}\cdot\underbrace{(\underset{n\times k}{B}\cdot\underset{k\times 1}{x})}_{n\times 1}}_{m\times 1}$$

Segue da:

Prop: $\underbrace{\underbrace{(\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times k}{B})}_{m\times k}\cdot\underset{k\times h}{C}}_{m\times h} = \underbrace{\underset{m\times n}{A}\cdot\underbrace{(\underset{n\times k}{B}\cdot\underset{k\times h}{C})}_{n\times h}}_{m\times h}$. Proprietà assoc. del prod righe x col.

Dim: provo che

$$\big((A\cdot B)\cdot C\big)_{ij} = \big(A\cdot(B\cdot C)\big)_{ij} \qquad \begin{matrix} i=1\dots m \\ j=1\dots h\end{matrix}$$

$$\sum_{l=1}^{k}(A\cdot B)_{il}\cdot(C)_{lj} \qquad\qquad \sum_{b=1}^{n}(A)_{ib}\cdot(B\cdot C)_{bj}$$

$$\sum_{l=1}^{k}\left(\sum_{b=1}^{n}(A)_{ib}\cdot(B)_{bl}\right)\cdot(C)_{lj} \qquad\qquad \sum_{b=1}^{n}(A)_{ib}\cdot\left(\sum_{l=1}^{k}(B)_{bl}\cdot(C)_{lj}\right)$$

$\blacksquare$

Visto: identificando $A \in M_{m \times n}$ con $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
identifico $\underbrace{M_{m \times n}(\mathbb{R})}_{\dim = m \cdot n}$ con $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Cor: se $\dim(V) = n$ e $\dim(W) = m$ allora
$\dim(\mathcal{L}(V,W)) = m \cdot n$. Att: la identificazione
tra V/W e $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}^m$ non è canonica ma dipende
dalla scelta di basi $\Rightarrow \mathcal{L}(V,W)$ si può identificare
a $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ma non canonicamente.

Prop: dati $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V e $w_1, \dots, w_n \in W$ qualsiasi
esiste una e una sola $f : V \to W$ lineare t.c.
$f(v_i) = w_i \quad i = 1 \dots n$.

Cioè: una appl. lin. è determinata dai suoi valori
su una base; inoltre su tale base posso
assegnarle come voglio.

Es: $V = \{ x \in \mathbb{R}^3 : 7x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \}$ $\quad \dim = 2$
$W = \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$. $\quad \dim = 3$

$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad w_1 = 1 - t + 5t^2$ $\quad w_2 = 4 + 3t - t^2$

Esiste unica lineare $f : V \to W$ t.c. $f(v_1) = w_1$ $\quad f(v_2) = w_2$.
Su $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in V$ tale f vale:

$$f\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} = f\left(-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5\\7\\0\end{pmatrix} + \frac{3}{5}\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}\right)$$

$$= -\frac{1}{5} f\begin{pmatrix}5\\7\\0\end{pmatrix} + \frac{3}{5} f\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix} = -\frac{1}{5}(1-t+5t^2) + \frac{3}{5}(4+3t-t^2)$$

$$= \frac{11}{5} + 2t - \frac{8}{5}t^2.$$

Dim: unicità: se tale f esiste su $v \in V$ deve valere:
se $x = [v]_{\mathcal{B}}$ ho $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ e devo avere
$f(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i$.

esistenza: devo provare che definendo f come sopra
(cioè $f(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i$ se $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$) ho che
f è lineare.

Devo vedere che $f(\alpha v + \beta u) = \alpha f(v) + \beta f(u)$
Siano $x = [v]_{\mathcal{B}}$, $y = [u]_{\mathcal{B}}$. So già che $[\alpha v + \beta u]_{\mathcal{B}} = \alpha x + \beta y$.

$$f(\alpha v + \beta u) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x + \beta y)_i \cdot w_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) \cdot w_i$$

$$\alpha f(u) + \beta f(v) = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i w_i + \beta \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i w_i$$

$\blacksquare$

Calcolare dim $W, Z, W\cap Z, W+Z$ verificando Grassmann.

$\boxed{4.5.2}$ $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}5\\-2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\-1\\-2\end{pmatrix}\right)$ $Z = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}7\\0\\3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\-2\\3\\5\end{pmatrix}\right)$

$\underline{z_1}$ $\underline{z_2}$

$\dim(W) = 2$ $\dim(Z) = 2$.

z_1 $z_2 - z_1 = \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$

$\dim(W\cap Z) + \dim(W+Z) = 2+2 = 4$

2	2
1	3
0	4

Cerchiamo $W\cap Z$: cerco le soluzioni a, b, c, d di

$$a\begin{pmatrix}5\\-2\\1\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\4\\-1\\-2\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}7\\0\\3\\4\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array}\begin{cases} c = \frac{1}{7}(5a+3b) \\ d = a-2b \\ a-b = \frac{3}{7}(5a+3b) \\ 3a-\cancel{2b} = \frac{4}{7}(5a+3b)\cancel{+a-2b} \end{cases} \qquad \begin{cases} c = \dots \\ d = \dots \\ \cancel{8a+16b=0} \\ \cancel{6a+12b=0} \end{cases} \qquad a+2b=0$$

$\dim(Z\cap W) = 1$ base: $\begin{pmatrix}+2\\-1\\+1\\+4\end{pmatrix}$

$W+Z$ generato da $\begin{pmatrix}5\\-2\\1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\\-1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\0\\3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$.

✓ ✓ ✗

non è comb. lin. I+II altrimenti il sist. prec. avrebbe soluz. con $c=1, d=0$ no

sist. prec. ha solut. con $d\neq 0$

$\boxed{4.5.3}$ $W = \text{Span}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-4\\5\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$$Z : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 3b = 7 \\ a - 2b = 1 \\ \dots \\ \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 17/5 \\ b = 6/5 \\ \hline 3 \cdot \frac{17}{5} + \frac{6}{5} = -1 \quad \text{NO} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \dim W = 3$$

$$\dim(Z) = 4 - 2 = 2$$

$$\dim(W \cap Z) + \dim(W + Z) = 3 + 2 = 5$$

2   3

1   4

Cerco $W \cap Z$ imponendo che un generico el. di W

$$a\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\-4\\5\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}7\\2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

stia in Z

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(a + 3b + 7c) + (2a - 4b + 2c) - 3(-a + 5b - c) + 5(3a + b - c) = 0 \\ 3(a + 3b + 7c) - (2a - 4b + 2c) + 2(-a + 5b - c) + (3a + b - c) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 22a - 8b + 14c = 0 \\ 2a + 24b + 16c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -12b - 8c \\ -132b - 88c - 4b + 7c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} +136b + 81c = 0 \\ \hline \end{cases}$$

$\dim = 1$ generato con:

$c = 136 \quad b = -81 \quad a = \pi$

sbagliato

$$71\begin{pmatrix}1\\2\\-4\\3\end{pmatrix}-81\begin{pmatrix}3\\-4\\5\\1\end{pmatrix}+136\begin{pmatrix}-7\\2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Verificare che $W+Z=\mathbb{R}^4$: scegliere un vettore a caso in Z risolvendo le equaz (accertandosi che non sia multiplo del generatore trovato di $W\cap Z$); verificare che base di W + tale vettore = base di $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{4.5.5}$ $W=\mathrm{Span}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\2\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\quad Z:\begin{cases}x_2+x_3-x_4+x_5=0\\ x_1-x_2+3x_3-x_4+2x_5=0\end{cases}$

$\dim(W)=2 \qquad \dim(Z)=5-2=3.$

$$\dim(W\cap Z)+\dim(W+Z)=2+3=5$$

2	3
1	4
0	5

Cerco $W\cap Z$:
$$\begin{cases}(a+2b)+(-a-b)-(3a+b)+(4a-b)=0\\(2a+5b)-(a+2b)+3(-a-b)-(3a+b)+2(4a-b)=0\end{cases}$$
$$\begin{cases}a-b=0\\3a-3b=0\end{cases}$$

$\dim(W\cap Z)=1$; base (con $a=b=1$): $\begin{pmatrix}7\\3\\-2\\4\\3\end{pmatrix}$

$W+Z$: trovo base di Z

$$\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -x_3 + x_4 - x_5 \\ x_1 = -x_3 + x_4 - x_5 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 \\ \quad = -4x_3 + x_4 - 3x_5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Generatori di $W+Z$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +4 \\ +1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{5.1.2}$ Provare che f è lineare, trovare Ker/Im e verif....

(a) $\boxed{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2}$ $\quad f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 7x_1 - 4x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$

f certamente non iniettiva

Lineare: le compo di $f(x)$ sono pol. omog. di I grado nelle compo di x. Anzi:

$$f(x) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

cioè $f = f_A \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

3	0
2	1
1	2

$$x \in Ker(f) \iff f(x) = 0 \iff \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 7x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 4x_1 + 3x_2 \\ 27x_1 + 11x_2 = 0 \end{cases} \iff x \in Span\begin{pmatrix} -11 \\ +27 \\ 37 \end{pmatrix}$$

$Im(f)$ guardo da : $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ ✓ $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ ✓ $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ✗

(c) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_2 + 11x_3 \end{pmatrix}$

$f = f_A \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 11 \end{pmatrix}$

$$\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

3	0	← caso $f = 0$
2	1	
1	2	
0	3	← caso f biiettiva

$$x \in Ker(f) \iff f(x) = 0 \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_2 + 11x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = -11x_3 \\ 2x_1 - 12x_3 = 0 \\ 3x_1 - 18x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 6x_3 \\ x_2 = -11x_3 \end{cases}$$

$\dim = 1$ $\quad Ker(f) = Span \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Im(f)$: generata da: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cancel{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}}$

$-6 \cdot I + 11 \cdot II$

(e) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ $\quad f(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot x$ $\quad f = f_A$

non può essere suriettiva

$\dim(Ker) + \dim(Im) = 3$

0	3
1	2
2	1
3	0

$Ker(f)$: $\begin{cases} x_3 = x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \\ 6x_1 + 8x_2 = 0 \end{cases}$ $\quad \dim = 1$ $\quad Ker(f) = Span \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Im(f)$: gen. da : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \cancel{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ $\quad \dim = 2.$

$-4 \cdot I + 3 \cdot II$

(i) $f : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathcal{M}_{n\times n}$ $\quad f(A) = A + {}^tA$.

$T(A) = {}^tA$ trasposizione - lineare

$f = id_{\mathcal{M}_{n\times n}} + T$ lineare

X insieme
$id_X : X \to X$
funzione identità di X
$id_X(x) = x \quad \forall x \in X$

$\dim(\mathrm{Ker}) + \dim(\mathrm{Im}) = n^2$

$\mathrm{Ker}(f) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n} : A + {}^tA = 0\} = \{A : {}^tA = -A\}$
$= \mathcal{A}_n$ matrici $n\times n$ antisimm.

A antisimm $\Longleftrightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

parametri liberi : i coeff. strettamente sopra la diag. principale :
$\dim = (n-1)+(n-2)+\dots+1 = \frac{(n-1)n}{2}$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = n^2 - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n}{2}(2n-(n-1)) = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$

$f(A) = A + {}^tA$

Osservo che $f(A)$ è sempre simmetrica:

$$ {}^t(A + {}^tA) = {}^tA + A = A + {}^tA. $$

Viceversa se M è simmetrica ho $M = f\left(\frac{1}{2}M\right)$.

Dunque $Im(f) = \{A : {}^tA = A\}$.

$$ A \text{ simm} \iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & & \\ & & & a_{44} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_{nn} \end{pmatrix} $$

$$ \dim = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}} $$