Algebra lineare 5/11/19

V, W sp. vett. $f: V \to W$ lineare se
$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2).$$

__Def__: data tale f (anche nel seguito) pongo

$$\mathrm{Ker}(f) = \{ v \in V : f(v) = 0 \} = f^{-1}(0) \quad \text{detto } \underline{\text{nucleo}}$$
$$\mathrm{Im}(f) = \{ f(v) : v \in V \} = f(V) = \{ w \in W : \exists v \in V \text{ con } f(v) = w \}.$$
detta __immagine__.

__Prop__: $\mathrm{Ker}(f) \subset V$ e $\mathrm{Im}(f) \subset W$ sono sottospazi vett.

__Dim__: dati $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ cioè $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
devo vedere che $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ cioè che
$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = 0$$
$$\| $$
$$\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$$
$$\|$$
$$\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 \quad = 0 \qquad \text{ok}$$

Dati $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}(f)$ cioè $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2)$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
devo vedere che $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in \mathrm{Im}(f)$ cioè $\exists v$ t.c.
$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = f(v)$; prendo $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$:
$$f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 . \qquad \blacksquare$$

Ricordo: $F : X \to Y$ funzione è:

- iniettiva se $F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- surgettiva se $F(X) = Y$ cioè $\forall y \in Y\ \exists x$ t.c. $y = F(x)$
- bigettiva se iniett. e surgett.

Prop: (1) $\mathrm{Ker}(f) = \{0\} \Longleftrightarrow f$ iniettiva

(2) $\mathrm{Im}(f) = W \Longleftrightarrow f$ suriettiva (ovvio per def)

(3) $\mathrm{Ker}(f) = V \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \{0\} \Longleftrightarrow f = 0$ (l'applicaz. costante nulla) (ovvio).

Dim (1): $\mathrm{Ker}(f) = \{0\} \Longleftrightarrow f$ iniettiva

cioè $f^{-1}(0) = \{0\}$ cioè $\forall w \in W$, $f^{-1}(w)$ è al max un solo pto.

$\Leftarrow$ ovvio.

$\Rightarrow$: supponiamo $f(v_1) = f(v_2)$; verifichiamo che ciò accade solo se $v_1 = v_2$. Infatti:

$$f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow f(v_1) - f(v_2) = 0 \Rightarrow f(v_1 - v_2) = 0$$
$$\Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 .$$

$\blacksquare$

Teorema (formula della dimensione): data $f : V \to W$ lineare se $\dim(V) < +\infty$ allora

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V).$$

Conseguenze:

(1) Se $\dim(V) < \dim(W)$ allora $f: V \to W$ non può essere surgettiva

Infatti: $\underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(f))}_{\geq 0} + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V) < \dim(W)$

$\Longrightarrow \dim(\mathrm{Im} f) < \dim(W)$ non surgettiva.

Es: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineare mai surgettiva

$f: \{x \in \mathbb{R}^8 : 5x_4 - 17x_7 + \sqrt{3}\, x_8 = 0\} \to \mathbb{R}_{\leq 11}[t]$ lin. mai surgettiva

"con uno sp. vett. di dim. più piccola non posso coprire linearmente uno di dim più grande"

↳ essenziale

(2) Se $\dim(V) > \dim(W)$ allora $f: V \to W$ lineare non è mai iniettiva

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{\leq \dim(W) < \dim(V)} = \dim(V)$$

$\Longrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) > 0 \Longrightarrow f$ non iniettiva.

Es: $f: \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^7$ lin. mai iniettiva

$f: \{x \in \mathbb{R}^{13} : 7x_1 - 5x_2 = 13x_5 - \pi x_{13} = 0\} \to \mathbb{R}_{\leq 9}[t]$ mai iniettiva.

"uno spazio vett. di dim più grande non si può infilare linearmente in modo fedele (senza piegare) in uno di dim più piccolo"

Dimo: $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)$.

Pongo $k = $ ↑ $n = $ ↑

Tesi: $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n-k$.

Prendo $v_1,\dots,v_k$ base di $\mathrm{Ker}(f)$; la completo a base $v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n$ di V.

Affermo che $f(v_{k+1}),\dots,f(v_n)$ sono base di $\mathrm{Im}(f)$ e ciò basta.

- generano: preso $w\in\mathrm{Im}(f)$ devo vedere che è comb. lin. di $f(v_{k+1}),\dots,f(v_n)$: so che $\exists v$ t.c. $w=f(v)$; dunque esistono $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ t.c.

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1}v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n$$

$$\Rightarrow w = f(v) = \cancel{\alpha_1\cdot 0 + \dots + \alpha_k\cdot 0} + \alpha_{k+1}f(v_{k+1}) + \dots + \alpha_n f(v_n)$$

- lin. indip: presi $\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n$ t.c. $\alpha_{k+1}f(v_{k+1})+\dots+\alpha_n f(v_n)=0$ devo vedere che per forza ho $\alpha_{k+1}=\dots=\alpha_n=0$. Infatti

$$f(\alpha_{k+1}v_{k+1}+\dots+\alpha_n v_n)=0$$

$$\Rightarrow \alpha_{k+1}v_{k+1}+\dots+\alpha_n v_n \in \mathrm{Ker}(f)$$

$$\Rightarrow \alpha_{k+1}v_{k+1}+\dots+\alpha_n v_n = \alpha_1 v_1+\dots+\alpha_k v_k$$

$$\Rightarrow (-\alpha_1)v_1+\dots+(-\alpha_k)v_k+\alpha_{k+1}v_{k+1}+\dots+\alpha_n v_n=0$$

$$\Rightarrow \cancel{(-\alpha_1)=\dots=(-\alpha_k)} = \alpha_{k+1}=\dots=\alpha_n=0.$$

▨

Q : come sono fatte le appl. lin. $V \longrightarrow W$

Q_0 : come sono fatte le appl. lin. $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Def: date $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n \times k}(\mathbb{R})$

definiamo $\underbrace{A \cdot B}_{m \times k} \in \mathcal{M}_{m \times k}(\mathbb{R})$ con

$$A \cdot B: \quad (m \times n)\cdot(n \times k)$$

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (A)_{il} \cdot (B)_{lj} \qquad \begin{array}{l} i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots k \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\underset{3 \times 4}{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & -2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}} \cdot \underset{4 \times 2}{\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} = \underset{3 \times 2}{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 11 & \cdot \\ \cdot & 52 \end{pmatrix}}$$

$5 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1$

$7 \cdot 6 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 + 5 \cdot 3$

prodotto righe x colonne tra matrici.

Prop: "il prodotto righe x colonne è lineare in ciascun argomento fissato l'altro":

$$\cdot : \mathcal{M}_{m\times n} \times \mathcal{M}_{n\times k} \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times k}$$
$$(A\ ,\ B) \longmapsto A\cdot B$$

· fissata A ho $\quad A\cdot(k\cdot B + h\cdot C) = k\cdot A\cdot B + h\cdot A\cdot C$

lin. a destra

· fissata B ho $\quad (k\cdot A + h\cdot C)\cdot B = k\cdot A\cdot B + h\cdot C\cdot B$.

lin. a sinistra

Dim:

$$\underbrace{\underset{m\times n}{A}\cdot \underbrace{\left(\underbrace{k\cdot \underset{n\times k}{B}}_{n\times k} + \underbrace{h\cdot \underset{n\times k}{C}}_{n\times k}\right)}_{n\times k}}_{m\times k} = \underbrace{\underbrace{k\cdot \underbrace{\underset{m\times n}{A}\cdot \underset{n\times k}{B}}_{m\times k}}_{m\times k} + \underbrace{h\cdot \underbrace{\underset{m\times n}{A}\cdot \underset{n\times k}{C}}_{m\times k}}_{m\times k}}_{m\times k}$$

Ora devo vedere che

$$\big(A\cdot(k\cdot B + h\cdot C)\big)_{ij} = \big(k\cdot A\cdot B + h\cdot A\cdot C\big)_{ij}$$

$$\big(A\cdot(k\cdot B + h\cdot C)\big)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (A)_{il}\cdot(k\cdot B + h\cdot C)_{lj} = \boxed{\sum_{l=1}^{n} (A)_{il}\cdot\big(k\cdot(B)_{lj} + h\cdot(C)_{lj}\big)} = \sum_{l=1}^{n}\big(k\cdot(A)_{il}\cdot(B)_{lj} + h\,(A)_{il}\cdot(C)_{lj}\big)$$

$$\big(k\cdot A\cdot B + h\cdot A\cdot C\big)_{ij} = k\cdot(A\cdot B)_{ij} + h\cdot(A\cdot C)_{ij} = \boxed{k\cdot\sum_{l=1}^{n}(A)_{il}\cdot(B)_{lj} + h\cdot\sum_{l=1}^{n}(A)_{il}\cdot(C)_{lj}}$$

$$\parallel$$

$$k\sum_{l=1}^{n}(A)_{il}(B)_{lj}+h\sum_{l=1}^{n}(A)_{il}(C)_{lj}.$$

OK $\blacksquare$

Conseguenza: data $\underset{m\times n}{A}\in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ l'applicazione

$$f_A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$$
$$\underset{n\times 1}{x}\longmapsto \underbrace{\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{x}}_{m\times 1}$$

è lineare.

Es: $A=\begin{pmatrix}4&2&2\\-1&3&-11\\5&-2&16\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times 3}$

$$f_A:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$$

$$f_A(x)=A\cdot x=\begin{pmatrix}4&2&2\\-1&3&-11\\5&-2&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x_1+2x_2+2x_3\\-x_1+3x_2-11x_3\\5x_1-2x_2+16x_3\end{pmatrix}$$

$$x\in\operatorname{Ker}(f_A)\iff f_A(x)=0\iff\begin{cases}4x_1+2x_2+2x_3=0\\-x_1+3x_2-11x_3=0\\5x_1-2x_2+16x_3=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x_1=3x_2-11x_3\\6x_2-22x_3+x_2+x_3=0\\15x_2-55x_3-2x_2+16x_3=0\end{cases}\iff\begin{cases}x_1=3x_2-11x_3\\7x_2-21x_3=0\\13x_2-39x_3=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x_2=3x_3\\x_1=-2x_3\end{cases}\iff x=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}\cdot x_3$$

Dunque $\operatorname{Ker}(f_A)=\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}\right)$; $\dim=1$.

Oss: per qualsiasi $f: V \to W$ lineare se $v_1, \dots, v_n$ è base di V allora $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono generatori di $Im(f)$:

se $w \in Im(f)$ ho $w = f(v)$ ma $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$$\Rightarrow w = f(v) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n).$$

i-esimo el. della base canonica di $\mathbb{R}^n$

Oss: se $A \in M_{m \times n}$ allora $A \cdot e_i$ è la i-esima colonna di A:

$$\begin{pmatrix} \cdot & a_{12} & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{32} & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$$

Conseguenza: data $A \in M_{m \times n}$ le colonne di A sono $A \cdot e_1, \dots, A \cdot e_n$ dunque sono generatori di $Im(f_A)$: per trovare base estraggo.

Per $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -11 \\ 5 & -2 & 16 \end{pmatrix}$ una base di $Im(f_A)$ è:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \checkmark \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \checkmark \quad \cancel{\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 16 \end{pmatrix}} \quad \Longrightarrow \dim(Im(f)) = 2.$$

$\parallel$

$2I - 3 \cdot II$

$$\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$$
$$1 + 2 = 3$$

Oss: abbiamo visto che $\mathcal{F}(S,\mathbb{R})$ è sp. vett. con operaz

$$(f+g)(s) = f(s)+g(s)$$
nuove
$$(k\cdot f)(s) = k\cdot f(s).$$
operaz. di $\mathbb{R}$

Più in generale se W è sp. vett. posso definire su $\mathcal{F}(S,W)$ una struttura di sp. vett. allo stesso modo:

$$(f+g)(s) = f(s)+g(s)$$
nuove
$$(k\cdot f)(s) = k\cdot f(s).$$
operaz. di W

Def: se V,W sono sp. vett. indico con $\mathcal{L}(V,W)$ l'insieme di tutte le appl. lin. da V a W.

Prop: $\mathcal{L}(V,W)$ è sottosp. vett. di $\mathcal{F}(V,W)$.

Dim: date $f_1,f_2\in\mathcal{L}(V,W)$, cioè lineari, cioè

$$f_1(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2) = \alpha_1 f_1(v_1)+\alpha_2 f_1(v_2)$$
$$f_2(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2) = \alpha_1 f_2(v_1)+\alpha_2 f_2(v_2)$$

e $\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}$ devo vedere che $\beta_1 f_1+\beta_2 f_2$ è lineare, cioè

$$(\beta_1 f_1+\beta_2 f_2)(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2) = \alpha_1(\beta_1 f_1+\beta_2 f_2)(v_1)+\alpha_2(\beta_1 f_1+\beta_2 f_2)(v_2)$$

$$\|$$

$$\beta_1 f_1(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2)+\beta_2 f_2(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2)$$
$$\|$$
$$\beta_1(\alpha_1 f_1(v_1)+\alpha_2 f_1(v_2))+\beta_2(\alpha_1 f_2(v_1)+\alpha_2 f_2(v_2))$$
$$\|$$
$$\underbrace{\beta_1\alpha_1 f_1(v_1)}_{(1)}+\underbrace{\beta_1\alpha_2 f_1(v_2)}_{(2)}+\underbrace{\beta_2\alpha_1 f_2(v_1)}_{(3)}+\underbrace{\beta_2\alpha_2 f_2(v_2)}_{(4)}$$

$$\|$$
$$\alpha_1(\beta_1 f_1(v_1)+\beta_2 f_2(v_1))+\alpha_2(\beta_1 f_1(v_2)+\beta_2 f_2(v_2))$$
$$\|$$
$$\underbrace{\alpha_1\beta_1 f_1(v_1)}_{(1)}+\underbrace{\alpha_1\beta_2 f_2(v_1)}_{(3)}+\underbrace{\alpha_2\beta_1 f_1(v_2)}_{(2)}+\underbrace{\alpha_2\beta_2 f_2(v_2)}_{(4)}$$

$\boxtimes$

$\tilde{Q}$: come è fatto lo spazio vettoriale $\mathcal{L}(V,W)$?

$\tilde{Q}_0$: come è fatto lo spazio vett. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$?

$\tilde{A}_0$: è $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.