

6
 $\{ 4 \cdot 2 \cdot 15$

$$\left\{ \begin{aligned} x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n (-1)^j x_j &= 0 \\ \sum_{j=1}^n (1 + (-1)^{j+1}) x_j &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Cominciamo con
 l'esempio $n=4$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

si cerca una base del s. spazio S di $\mathbb{R}^4$
 dato dalle soluzioni del sistema
 Tale spazio S è dato dai vettori

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a \\ -b \end{pmatrix} \text{ al variare di } a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Propongo come base di S i due vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sono lin indipendenti:

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si vede subito
che deve essere $\gamma = 0$ e $\delta = 0$

Generano S :

Prendo un generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ -a \\ b \end{pmatrix} \in S$

noto che
e posso ottenerlo come

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Caso $n=1$

$$\begin{cases} -x_1 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases}$$

S è il sottospazio di $\mathbb{R}^7$ dato da $\{0\}$

non c'è base. (la base è l'insieme vuoto, come scritto sul libro).

Caso $n=2$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases}$$

S è il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ dato da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

non c'è base, come sopra.

Caso $n \geq 3$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + \dots = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 + \dots = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + \dots = 0 \\ 2x_2 + 2x_4 + \dots = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 0 \\ x_2 + x_4 + \dots = 0 \end{cases}$$

Proponiamo una base, ponendo per ogni $i > 2$
 $x_i = 1$ e $x_j = 0$ se $j > 2$ e $i \neq j$

$$x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_3 \qquad v_4 \qquad v_5 \qquad v_6$

$$x_{2i+1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

v_{2i+1}

Ore in questo modo

$$x_{2i} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

v_{2i}

$n-2$ vettori

$$v_3, v_4, \dots, v_n$$

Sono lin. INDIP? Sì perché sono
"a scala", dal basso.

$$\gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Generano S?

Studiando come si scrive
un generico el di S

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 + x_4 - \dots \\ x_2 = -x_4 - x_6 - \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - x_5 - x_7 - \dots \\ x_2 = -x_4 - x_6 - \dots \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -a_3 - a_5 - a_7 - \dots \\ -a_4 - a_6 - a_8 - \dots \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ a_m \end{pmatrix}$$

generico el di S

lo si può ottenere come

$$a_3 v_3 + a_4 v_4 + \dots + a_m v_m$$

4.2.18 (*)

$$S = \left\{ A \in M_{n \times n} : \text{tr}(A) = 0 \right\}$$

Facciamo primo l'esempio $n=3$

esempio $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 7 & -1 & 18 \\ 91 & \pi & -1 \end{pmatrix} \in S$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

$\text{Tr } X = 0$ equivale a imporre l'equazione

$$\begin{cases} x_{11} + x_{22} + x_{33} = 0 \end{cases}$$

Proposta di base:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$v_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per verificare la lineare indipendenza si importa l'equazione e si arriva facilmente al passaggio finale:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{da cui } \alpha = \beta = 0$$

Generano? Una matrice generica in S

$$\bar{e} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{11}-a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{12} v_{12} + a_{13} v_{13} + a_{21} v_{21} + a_{23} v_{23} \\ + a_{31} v_{31} + a_{32} v_{32} + -a_{22} v_1 + \\ + (a_{11} + a_{22}) v_2$$

$$- a_{22} v_1 + (a_{11} + a_{22}) v_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} -a_{22} & & \\ & a_{22} & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}+a_{22} & & \\ & 0 & \\ & & -a_{11}-a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & -a_{11}-a_{22} \end{pmatrix}$$

In generale

E_{ij} se $i \neq j$ è la matrice.

$$i = \begin{pmatrix} \overset{j}{1} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e il resto } 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

la base di S è data da

E_{ij} con $i \neq j$ e

$v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$.

Sono in totale $(n^2 - n) + (n - 1) = n^2 - 1$ elementi
 } 4.2.20

$$A_n = \left\{ A \in M_{n \times n} : {}^t A = -A \right\}$$

Con $n=3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$${}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Cora è la trasposta:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$${}^t A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Chiedere ${}^t A = -A$ equivale a chiedere.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} = -a_{11} \Rightarrow a_{11} = 0 \\ a_{22} = -a_{22} \Rightarrow a_{22} = 0 \\ a_{33} = -a_{33} \Rightarrow a_{33} = 0 \\ a_{21} = -a_{12} \\ a_{31} = -a_{13} \\ a_{32} = -a_{23} \end{array} \right.$$

La generica matrice di A_3 dunque ha la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

Come base perangio

$$E_{12} - E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{13} - E_{31}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = E_{23} - E_{32}$$

Sono lin INDIP? Sì facile.

Generano? Sì: infatti presa la

generica matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= a (E_{12} - E_{21}) + b (E_{13} - E_{31}) + \\ + c (E_{23} - E_{32})$$

Caso generale: una base è data dalle matrici:

$$E_{ij} - E_{ji} \quad \text{con } i < j$$

Quante sono? Tante quante le coppie
(i, j) con $i < j$

$$\begin{array}{ccc} (1, 2) & (1, 3) & (1, n) \\ & (2, 3) & (2, n) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Logo $1+2+3+4+\dots+m-1 = \frac{m(m-1)}{2}$

Le equazioni erano $(1+2+\dots+m)$. Del resto

$$m^2 - (1+2+3+\dots+m) =$$

$$= m^2 - \frac{m(m+1)}{2} = \frac{2m^2 - m^2 - m}{2} =$$

$$= \frac{m^2 - m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$$

es 4.2.22

$$\left\{ p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 4}[t] : \begin{aligned} 2p(1) + p''(-1) &= \\ &= p(2) - 3p'(1) = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$p(t) = a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

$$\text{con } a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$$

$$p'(t) = 4a_4 t^3 + 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1$$

$$p''(t) = 12a_4 t^2 + 6a_3 t + 2a_2$$

Dom $\mathbb{R}_{\leq 4}[t]$ ha dimensione 5

Infatti: $1, t, t^2, t^3, t^4$ è una base.

$\downarrow {}^2 p(1)$

$\downarrow p''(-1)$

$$\begin{cases} 2(a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) + (12a_4 - 6a_3 + 2a_2) = 0 \\ (16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0) - 3(4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14a_4 - 4a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 2a_0 = 0 \\ 4a_4 - a_3 - 2a_2 - a_1 + a_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a_4 - 2a_3 + 8a_2 + 4a_1 = 0 \\ 4a_4 - a_3 - 2a_2 - a_1 + a_0 = 0 \end{cases}$$

Generica soluzione.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}a_3 - \frac{11}{2}a_4 \\ \frac{-6a_4 + 2a_3 - 8a_2}{4} \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

$$a_0 = a_1 + 2a_2 + a_3 - 4a_4$$

$$a_0 = \underbrace{-3a_4 + a_3 - 4a_2}_2 + 2a_2 + a_3 - 4a_4$$

$$= \frac{3}{2}a_3 - \frac{11}{2}a_4$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$p_1(t) = t^4 - \frac{3}{2}t - \frac{11}{2}$$

$$12t^2$$

$$\downarrow$$

$$p_2(t) = t^3 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$$

$$\downarrow$$

$$p_3(t) = t^2 - 2t$$

$$2 \left(1 - \frac{3}{2} - \frac{11}{2} \right) + 12 = 2(-6) + 12 = 0$$

Guardando i gradi dei polinomi $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$, oppure il fatto che i vettori che li rappresentano sono a scemi dal basso, nota facilmente che sono lin INDIP.

Inoltre generano il v. spazio. Infatti un vettore generico è

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}a_3 - \frac{11}{2}a_4 \\ -\frac{3}{2}a_4 + \frac{1}{2}a_3 - 2a_2 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} =$$

$$= a_4 \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ho usato la notazione in vettori, equivale a mostrare che $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ sono generatori.

(un vantaggio dell'algebra lineare è proprio questo).

§ 4.4.1

$$V = \mathbb{R}^4$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

PRIMA DOMANDA: SONO LIN INDIP?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

↑
OK perché $\bar{e} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

OK perché non è multiplo del primo.
Per decidere se $v_3 \in \text{span}(v_1, v_2)$ può convenire

presentare diversamente questi v. spaziali

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 5 \\ -30 \end{pmatrix} = v_2 - 7v_1 = w_2$$

chiamagli questo
nome!

Affermo che

$$\text{span}(v_1, v_2) = \text{span}(v_1, v_2 - 7v_1)$$

$$\downarrow$$
$$2v_1 + \beta v_2$$

$$\gamma v_1 + \delta (v_2 - 7v_1)$$

si vuole rivolgere al
calcolo che $\in \text{span}(v_1, v_2)$
dunque vale $\supseteq$

Per quel che riguarda

$$\subseteq \quad 2v_1 + \beta v_2 = 2v_1 + \beta v_2 - 7\beta v_1 +$$
$$+ 7\beta v_1 =$$

$$= (2 + 7\beta) v_1 + \beta (v_2 - 7v_1)$$

$w \in \text{Span}(v_1, v_2 - 7v_1)$

Ho ridotto il problema a capire se

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 5 \\ -30 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Per avere speranza

Deve essere $\alpha = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 5 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\beta = \frac{1}{5} \quad \text{ma}$$

$$8 + (-6) = -2 \quad \text{FALSA}$$

Quindi i tre vettori sono lin. INDIP

Ora considero

$$\text{Span} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 5 \\ -30 \end{pmatrix}}_{w_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}}_{v_3} \right)$$

$$= \text{Span} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 5 \\ -30 \end{pmatrix}}_{w_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}}_{v_3 - (v_1 + \frac{1}{5} w_2)} \right)$$

$\uparrow$
 lo span non cambia per ragionamento analogo a quello visto sopra.
 $v_3 \rightarrow v_3 - (v_1 + \frac{1}{5} w_2)$

Prendo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è il complemento cercato

Infatti:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

sono una base di $\mathbb{R}^4$

(basta verificare che sono lin INDIP,
ed è immediato perché sono
"a colonne")