Algebra Lineare 29/10/19

Visto: $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$

- dati $w_1, \dots, w_k$ generatori è possibile estrarne una base
- dati $w_1, \dots, w_h$ lin. indip. è possibile completarli a base

Conseguenza: se $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ e ho $v_1, \dots, v_n \in V$
sono fatti equivalenti:

1) sono base
2) sono lin. indip.
3) generano.

Quindi: se ho già il numero giusto di vettori basta verificare mezza def. di base per avere l'altra mezzo.

Es: $V = \mathbb{R}^2$ $\quad \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}}_{2}$ lin. indip
$\Longrightarrow$ sono base.

Es: $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{8x_1 - 10x_2 + 5x_3 = 0}\}$

$\dim(V) = 3 - 1 = 2$

$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ lin. indip $\Longrightarrow$ base.

<u>Dimo</u> (conseguenze): (1) $\Rightarrow$ (2), (3)

(2) posso completare $v_1, \dots, v_m$ a base, ma non aggiungo nulla

(3) posso estrarre da $v_1, \dots, v_m$ una base, ma non scarto nulla. $\blacksquare$

Dimensione di sottospazi

<u>Prop</u>: se $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ e $W \subset V$ è sottospazio allora $\dim_{\mathbb{R}}(W) \leq n$; inoltre $\dim_{\mathbb{R}}(W) = n \Leftrightarrow W = V$.

<u>Dim</u>: W ha $\dim < +\infty$ allora W contiene $w_1, \dots, w_{n+1}$ lin. indip : assurdo (Prop. difficile) poiché $W \subset V$.

Se $\dim(W) = k$ ho base $w_1, \dots, w_k$ di $W \subset V$; sono vett. lin. indip. in $V \Rightarrow$ (Prop. difficile) $k \leq n$.

Se $k = n$ ho che $w_1, \dots, w_n$ sono base di $V \Rightarrow W = V$. $\blacksquare$

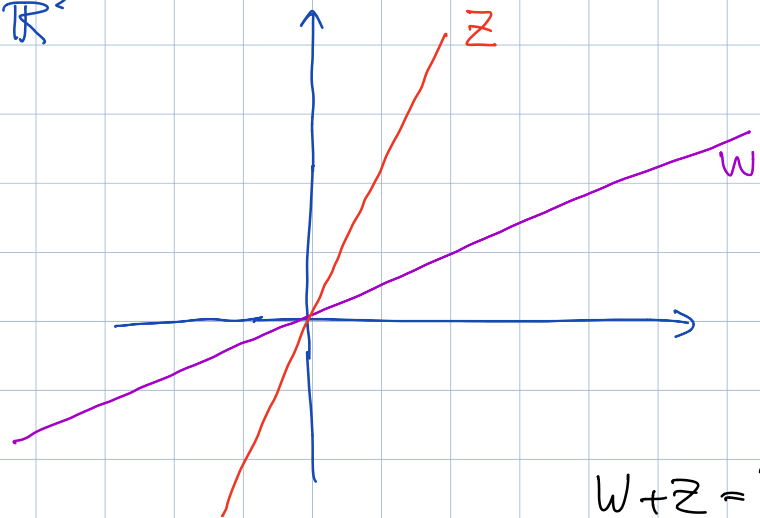
<u>Ricordo</u>: $W, Z \subset V$ sottosp $\Rightarrow$ $W \cap Z$ è sottosp;
$W \cup Z$ solo se $W \subset Z$ o $Z \subset W$.

<u>Def</u>: chiamo $W + Z$ (nuovo) il più piccolo sottosp. che contiene $W \cup Z$ (cioè $\mathrm{Span}(W \cup Z)$).

Es: $V = \mathbb{R}^2$

$W \cap Z = \{0\}$

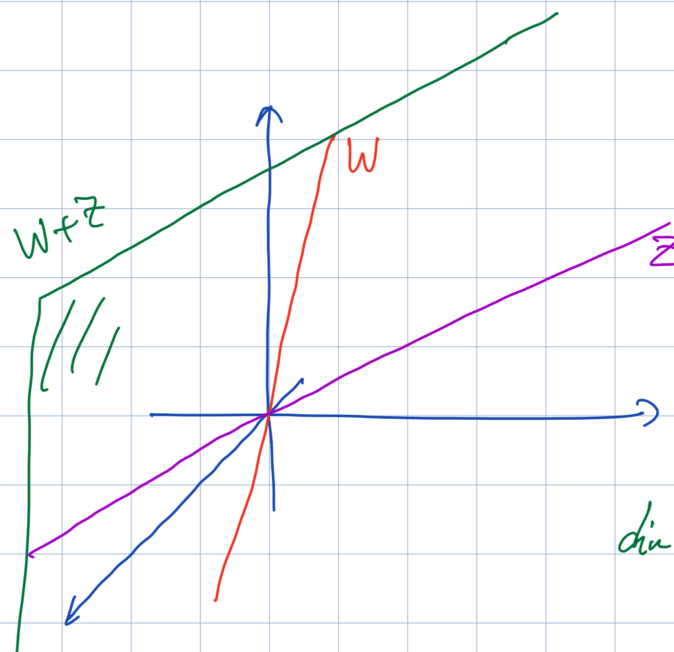
$0 + 2 = 1 + 1$



$W + Z = \mathbb{R}^2$

Es: $V = \mathbb{R}^3$

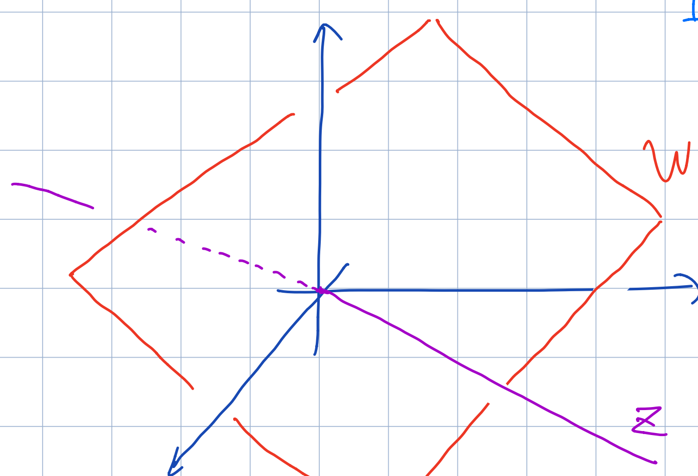
$0 + 2 = 1 + 1$



$\dim(W+Z) = 2.$

$0 + 3 = 2 + 1$

Es: $V = \mathbb{R}^3$



$W + Z = \mathbb{R}^3$

nuovo — somma tra vett.

Prop: $W \overset{\text{nuovo}}{+} Z = \{\underbrace{w+z}_{\text{somma tra vett.}} : \ w \in W, z \in Z\}$.

Dim: chiamo X l'insieme a dx. Devo vedere che:

(a) $X \supset W \cup Z$

(b) X stsp.

(c) se Y è stsp. $Y \supset W \cup Z \Rightarrow Y \supset X$.

(a) $w \in W \Rightarrow \underset{\in W}{w} + \underset{\in Z}{0} = w \in X \Rightarrow W \subset X$

stesso: $Z \subset X$

(b) $x_1, x_2 \in X$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ cioè $x_1 = w_1 + z_1$, $x_2 = w_2 + z_2$

$\Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \underbrace{(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)}_{W} + \underbrace{(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)}_{Z} \in X$

(c) preso $x \in X$ ho $x = \underset{\in Y}{w} + \underset{\in Y}{z} \in Y \Rightarrow X \subset Y$. $\blacksquare$

Teo: se $W, Z \subset V$ sono sottospazi allora

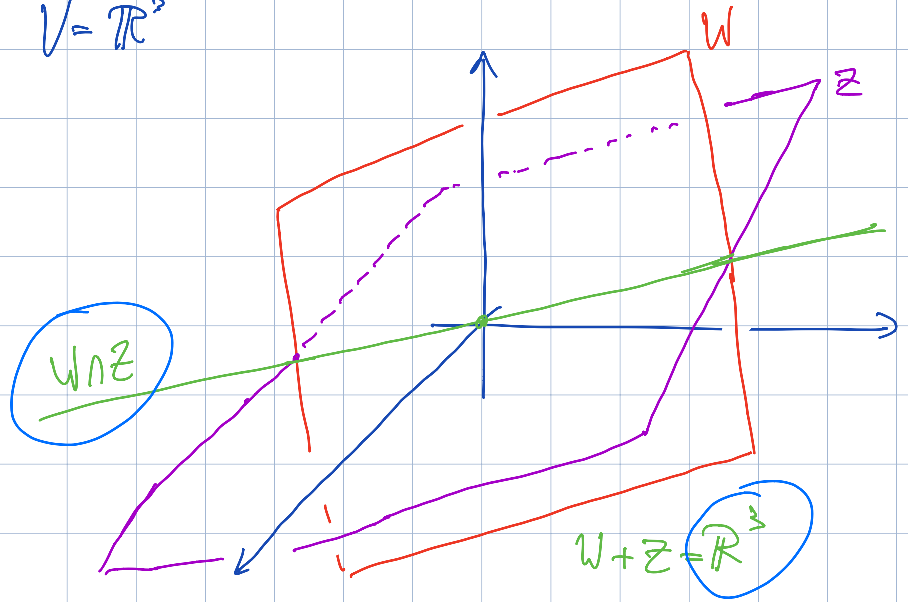
$$\dim(W \cap Z) + \dim(W + Z) = \dim(W) + \dim(Z).$$

(formula di Grassmann).

Es: se $Z \subset W$ ho $W \cap Z = Z$ $\quad W + Z = W$

$$\dim(\underbrace{W \cap Z}_{Z}) + \dim(\underbrace{W + Z}_{W}) = \dim(W) + \dim(Z).$$

Es: $V = \mathbb{R}^3$



$1 + 3 = 2 + 2$

Es: se $W, Z \subset \mathbb{R}^4$ $\quad \dim(W) = 2 \quad \dim(Z) = 2$

$$\dim(W \cap Z) + \dim(W+Z) = \dim(W) + \dim(Z)$$

visti in $\mathbb{R}^3$ $\left\{ \begin{array}{ccc} 2 & + & 2 \\ 1 & + & 3 \end{array} \right.$

nuovo $\left\{ \begin{array}{ccc} 0 & + & 4 \end{array} \right.$

$= 2 + 2 = 4$

$W = \mathrm{Span}(e_1, e_2) \qquad Z = \mathrm{Span}(e_3, e_4)$

Es: $W, Z \subset \mathbb{R}^6$ $\quad \dim(W) = 3 \quad \dim(Z) = 4$

$$\dim(W \cap Z) + \dim(W+Z) = 3 + 4 = 7$$

$$\left. \begin{array}{ccc} 3 & + & 4 \\ 2 & + & 5 \\ 1 & + & 6 \end{array} \right\} = 7$$

$\Downarrow$

hanno in comune almeno una retta $(3+4>6)$

Dim: $\dim(W\cap Z)+\dim(W+Z)=\dim(W)+\dim(Z)$

Scelgo nomi: $\dim(W\cap Z)=k$, $\dim(W)=h$, $\dim(Z)=m$

Tesi: $\dim(W+Z)=h+m-k$.

Scelgo base $u_1,\dots,u_k$ di $W\cap Z$. Si tratta di k vett. lin. indip. in W $\Rightarrow$ posso completare a base $u_1,\dots,u_k,w_{k+1},\dots,w_h$ di W
lin. indip. in Z $\Rightarrow$ posso completare a base $u_1,\dots,u_k,z_{k+1},\dots,z_m$ di Z.

Affermo che $\underbrace{\underbrace{u_1,\dots,u_k}_{k},\underbrace{w_{k+1},\dots,w_h}_{h-k},\underbrace{z_{k+1},\dots,z_m}_{m-k}}_{k+h-k+m-k\,=\,h+m-k}$ sono base di $W+Z$:

ciò implica la tesi.

- lin. indip.: dobbiamo provare che le uniche costanti $\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_{k+1},\dots,\beta_h,\gamma_{k+1},\dots,\gamma_m$ t.c.

$$\alpha_1u_1+\dots+\alpha_ku_k+\beta_{k+1}w_{k+1}+\dots+\beta_hw_h+\gamma_{k+1}z_{k+1}+\dots+\gamma_mz_m=0$$

sono tutte nulle. Infatti:

$$\underbrace{+\alpha_1u_1-\dots+\alpha_ku_k+\beta_{k+1}w_{k+1}\dots+\beta_hw_h}_{\in W}=\underbrace{-\gamma_{k+1}z_{k+1}-\dots-\gamma_mz_m}_{\in Z}\quad(*)$$

$\Rightarrow$ tale vettore sta in $W\cap Z$

quindi esistono $\delta_1, \dots, \delta_k$ t.c.

$$-\gamma_{k+1} z_{k+1} - \dots - \gamma_m z_m = \delta_1 u_1 + \dots + \delta_k u_k$$

$$\Rightarrow \delta_1 u_1 + \dots + \delta_k u_k + \gamma_{k+1} z_{k+1} + \dots + \gamma_m z_m = 0$$

$$\Longrightarrow (\delta_1 = \dots = \delta_k =) \ \gamma_{k+1} = \dots = \gamma_m = 0$$

Sostituendo in (*)

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k + \beta_{k+1} w_{k+1} + \dots + \beta_h w_h = 0$$

$$\Longrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_{k+1} = \dots = \beta_h = 0.$$

<u>OK</u>

- generano: se $x \in W + Z$ so che $x = \underset{W}{\underset{\cap}{w}} + \underset{Z}{\underset{\cap}{z}}$

$\Rightarrow$ esistono $\alpha_1, \dots, \beta_{k+1}, \gamma_1, \dots, \delta_{k+1} \dots$ t.c.

$$w = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k + \beta_{k+1} w_{k+1} + \dots + \beta_h w_h$$
$$z = \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_k u_k + \delta_{k+1} z_{k+1} + \dots + \delta_m z_m$$

$$\Rightarrow w + z = (\alpha_1 + \gamma_1) u_1 + \dots + (\alpha_k + \gamma_k) u_k + \beta_{k+1} w_{k+1} + \dots + \delta_{k+1} z_{k+1} + \dots$$

▨

<u>Def</u>: se V, W sono sp. vett. su $\mathbb{R}$ una $f : V \to W$ si dice <u>lineare</u> se rispetta le operaz. di sp. vett.:

- $f(0) = 0$
- $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$
- $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$

<u>Oss</u>: è equivalente chiedere che $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$ $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ v_1, v_2 \in V$.

Es: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{5}{2}x_1 - 9x_2 + \sqrt{3}\cdot x_3$$

lineare perché è pol. omog. di grado 1 nelle comp. di x

Lineare: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^3$

$$f(\alpha x + \beta y) \overset{?}{=} \alpha f(x) + \beta f(y)$$

$$f(\alpha x + \beta y) = f\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}(\alpha x_1 + \beta y_1) - 9(\alpha x_2 + \beta y_2) + \sqrt{3}(\alpha x_3 + \beta y_3)$$

$$\alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha\left(\frac{5}{2}x_1 - 9x_2 + \sqrt{3}x_3\right) + \beta\left(\frac{5}{2}y_1 - 9y_2 + \sqrt{3}y_3\right)$$

$\boxed{\text{Sì}}$

Es: $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$

lineare (come sopra).

Es: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sin(x_1 + x_2)$

- $f(0) = 0$
- $f(x+y) \overset{?}{=} f(x) + f(y)$

$$\sin(x_1 + y_1 + x_2 + y_2) \overset{?}{=} \sin(x_1 + x_2) + \sin(y_1 + y_2)$$

$$x = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

No

Es: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x_1^2 + 7x_2$

- $f(0) = 0$
- $f(\lambda x) \overset{?}{=} \lambda f(x)$

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda = 2$ **No**

Es: $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \quad f(x) = \log\left(e^{\sqrt{3}x_1 - 5x_2 + \pi x_3 - \frac{7}{4}x_4} \right)$

$f(x) = \sqrt{3}x_1 - 5x_2 + \pi x_3 - \frac{7}{4}x_4$ lineare.

Oss: poiché in $\mathbb{R}^m$ le operazioni si eseguono componente per componente, una

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

è lineare se e solo se lo sono tutte le $f_1, \dots, f_m$ componenti.

Es: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad f(x) = \begin{pmatrix} 5x_1 - x_3 \\ 2x_2 - \sqrt{2}x_3 \\ \pi x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 \end{pmatrix}$ lin.

Es: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad f(x) = \begin{pmatrix} 5x_1 + \sqrt{17}x_2 \\ \boxed{x_1 x_2} \\ 9x_1 - \pi x_2 \end{pmatrix}$ non lin

Visto: giocano il ruolo delle componenti di un $x \in \mathbb{R}^m$

- per $\mathbb{R}[t]$, i coeff di $p(t)$
- per $M_{m \times n}(\mathbb{R})$, i coeff. $(A)_{ij}$ di A
- per $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, i valori $g(x)$ $x \in X$ di g

$\Longrightarrow$ le appl. lin. sono quelle le cui coord/coeff/valori dopo l'applicazione sono pol. omog. di I grado nei coord/coeff/valori prima dell'applicazione.

<u>Es</u>: $f : \mathbb{R}[t] \longrightarrow M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$f\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j\right) = \begin{pmatrix} 3a_0 - 5a_7 & a_1 + 2a_2 + a_3 & 100\, a_9 \\ -\sqrt{3}\, a_2 & 4a_7 - \frac{9}{4} a_{11} & a_{10} - a_{1000} \end{pmatrix}$$

<u>Es</u>: $f : \mathcal{F}(\{a,b,c\}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$

$$f(x) = \big(x(a) - 7x(b)\big) + \big(7x(a) - x(c)\big).t + \left(\sqrt{3}\,x(a) - x(b) + \frac{5}{11} x(c)\right).t^2$$

<u>Oss</u>: dati V, W, Z sp. vett. e $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$ lineari si ha che $g \circ f$ è lineare.

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$(g \circ f) : X \to Z$$
$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Es: $f : \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(p(t)) = p(-3)$$

$$f(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) = \underbrace{a_0 - 3a_1 + 9a_2 - 27a_3 \dots}_{\text{pol. omog. di grado I}}$$

Es: $D : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$

$$D(p(t)) = p'(t)$$

$$D(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots$$

OK

Es: $f : \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(p(t)) = \int_0^1 p(s)\, ds$$

$$f(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) = \underbrace{a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{4}a_3 + \dots}$$

OK

Es: $I : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$

$$f(p(t)) = \int_0^t p(s)\, ds$$

$$f(a_0 + a_1 t + \dots) = a_0 t + \frac{1}{2}a_1 t^2 + \frac{1}{3}a_2 t^3 + \frac{1}{4}a_3 t^4 + \dots$$

OK