Algebra Lineare 23/10/19

V sp. vett. su $\mathbb{R}$; base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ lin. indip. + generano.

Teo: tutte le basi hanno stesso numero di elementi

Prop: $v_1, \dots, v_p$ lin. indip $\in \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_q)$ allora $p \leq q$.

$\dim_{\mathbb{R}}(V)$ = num. di el. di qualsiasi base.

Cor: se $\dim(V) = n$ e ho vettori $w_1, \dots, w_m \in V$

(1) se $m < n$ allora $w_1, \dots, w_m$ non generano

(2) se $m > n$ allora $w_1, \dots, w_m$ non sono lin. indip.

Dimo: V ha base $v_1, \dots, v_n$ (lin indip. e generano)

(1) Se per assurdo generassero avrei

$v_1, \dots, v_n$ lin. indip $\in \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_m) \overset{\text{Prop}}{\Longrightarrow} n \leq m$

Assurdo.

(2) Se per assurdo $w_1, \dots, w_m$ sono lin indip

$w_1, \dots, w_m$ lin. indip $\in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n) \overset{\text{Prop}}{\Longrightarrow} m \leq n$

Assurdo. $\square$

Es: $V = \mathbb{R}^3$ $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

- $\begin{pmatrix} 7 \\ \sqrt{2} \\ -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 \\ \pi \\ -e \end{pmatrix}$ non generano

- $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3/4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ non sono lin. indip.

Prop: dati spazi vettoriali V, W di dim. finita

$\exists f: V \to W$ bigettiva che rispetta le operazioni $\Longleftrightarrow \dim(V) = \dim(W)$.

"due sp. vett. sono uguali come sp. vett. $\iff$ hanno la stessa dim"

<u>Cor</u>: • $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ non sono uguali come sp. vett.

• $\mathbb{R}_{\leq 7}[t]$ è uguale a $\mathbb{R}^8$ come sp. vett.

<u>Attenzione</u>: esistono applicazioni bigettive $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
($\Rightarrow$ come insiemi $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ sono uguali; ma non come sp. vett.)

<u>Dim prop</u>: $\Leftarrow$: poiché $\dim(V) = \dim(W) = n$
ho basi $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di V e $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ di W;

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "{[\cdot]_{\mathcal{C}}^{-1} \circ [\cdot]_{\mathcal{B}}}"] \arrow[dr, "{[\cdot]_{\mathcal{B}}}"'] & & W \arrow[dl, "{[\cdot]_{\mathcal{C}}}"] \\
& \mathbb{R}^n &
\end{tikzcd}$$

tale $[\cdot]_{\mathcal{C}}^{-1} \circ [\cdot]_{\mathcal{B}}$ è bigettiva e conserva operaz.

$\Rightarrow$: supponiamo che esista $f : V \to W$ bigettiva che conserva le operazioni; dobbiamo vedere che esistono basi di V e W con stesso numero di elementi.
Prendo base $(v_1, \dots, v_n)$ di V e affermo che $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ è base di W:

• lin. indip: devo vedere che gli unici $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ t.c.
$\alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n) = 0$ sono $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$;

$\Downarrow$ f conserva prod per scal

$f(\alpha_1 v_1) + \dots + f(\alpha_n v_n) = 0$

$$\Downarrow \text{ f conserva somme}$$
$$f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = 0$$
$$\Downarrow \text{ f conserva 0}$$
$$f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = f(0)$$
$$\Downarrow \text{ f iniettiva}$$
$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$
$$\Downarrow\ v_1, \dots, v_n \text{ lin. indip}$$
$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

- generano: dato $w \in W$ devo provare che esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ t.c. $w = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n)$; poiché f è surgettiva esiste $v \in V$ t.c. $w = f(v)$; poiché $v_1, \dots, v_n$ generano V esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ t.c. $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$; dunque

$$w = f(v) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n). \qquad \blacksquare$$

Come costruire basi di uno sp. vett.?

Lemma 1: dati $v_1, \dots, v_n$ lin indip. e $v_0 \in V$ ho
$v_0, v_1, \dots, v_n$ lin. indip $\iff v_0 \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$.

Es: $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$;

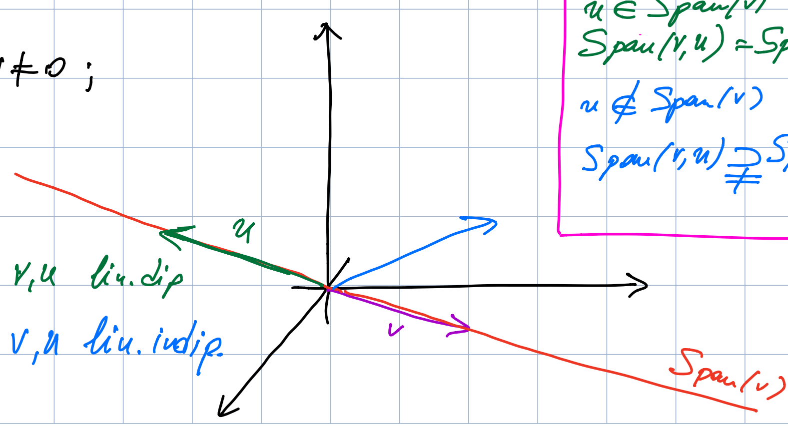
$u \in \mathbb{R}^3$

→ $u \in \mathrm{Span}(v) \Rightarrow v, u$ lin. dip

→ $u \notin \mathrm{Span}(v) \Rightarrow v, u$ lin. indip.

$u \in \mathrm{Span}(v)$
$\mathrm{Span}(v, u) = \mathrm{Span}(v)$

$u \notin \mathrm{Span}(v)$
$\mathrm{Span}(v, u) \supsetneq \mathrm{Span}(v)$



Es: $v, w \in \mathbb{R}^3$ lin. indip
(non multipli fra loro)

$u \in \text{Span}(v,w) \Rightarrow \text{Span}(v,w,u) = \text{Span}(v,w)$

$u \notin \text{Span}(v,w) \Rightarrow \text{Span}(v,w,u) \supsetneq \text{Span}(v,w)$

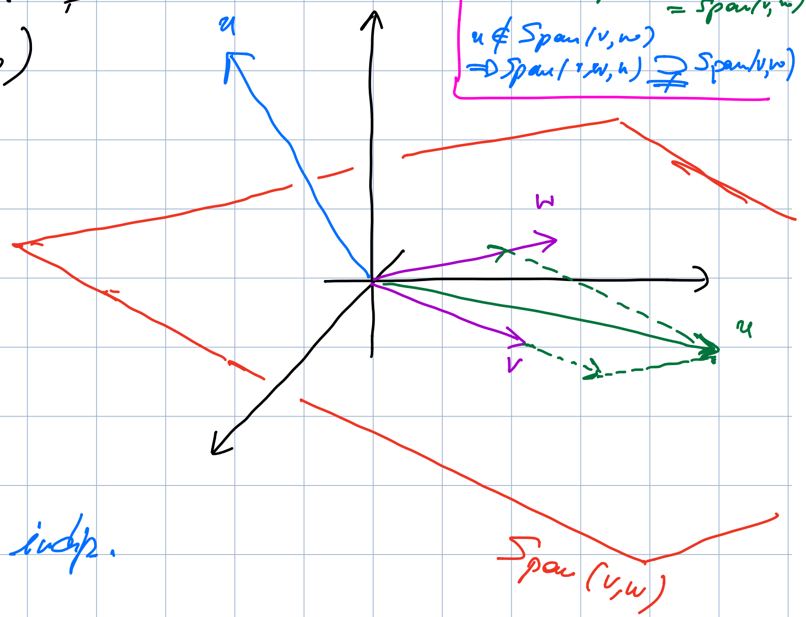
$u \in \mathbb{R}^3$

$\to u \in \text{Span}(v,w)$

v, w, u lin. dip.

$\to u \notin \text{Span}(v,w)$

v, w, u lin. indip.



Lemma 1: dati $v_1, \dots, v_m$ lin indip. e $v_0 \in V$ ho

$$v_0, v_1, \dots, v_m \text{ lin. indip} \iff v_0 \notin \text{Span}(v_1, \dots, v_m).$$

Dimo dimostro le contronominali

$$v_0, v_1, \dots, v_m \text{ lin. dip} \iff v_0 \in \text{Span}(v_1, \dots, v_m).$$

$\Leftarrow$: $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ t.c. $v_0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$

$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{(-1)}_{\neq 0} \cdot v_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0}_{\text{comb. lin. con ris } 0 \text{ e coeff non tutti } 0}$$

$\Rightarrow$ lin. dip.

$\Rightarrow$: $\exists\, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ non tutti nulli t.c.

$$\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0.$$

Se fosse $\underline{\alpha_0 = 0}$ avrei $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$

dunque $\underline{\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0}$: NO.

Dunque $\alpha_0 \neq 0 \Rightarrow v_0 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} v_1 + \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_0} v_m$

$\Rightarrow v_0 \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m)$. ▨

<u>Lemma 2</u>: dati $v_0, v_1, \dots, v_m \in V$ si ha:

$$\mathrm{Span}(v_0, v_1, \dots, v_m) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m) \Leftrightarrow v_0 \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m)$$

<u>Dimo</u>: $\Leftarrow$ So che $v_0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$; chiaro che $\mathrm{Span}(v_0, v_1, \dots, v_m) \supset \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m)$; viceversa devo vedere che ogni $v \in \mathrm{Span}(v_0, v_1, \dots, v_m)$ appartiene a $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m)$; ho

$$\begin{aligned} v &= \beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m \\ &= \beta_0 (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m \\ &= (\alpha_1 \beta_0 + \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_m \beta_0 + \beta_m) \cdot v_m \end{aligned}$$ <u>ok</u>

$\Rightarrow$ $v_0 \in \mathrm{Span}(v_0, v_1, \dots, v_m) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m)$. ▨

<u>Prop</u>: se $\dim(V) = +\infty$ io posso trovare insiemi di vettori lin. indip. arbitrariamente numerosi.

<u>Dimo</u>: per assurdo sia $k \in \mathbb{N}$ t.c. esistano $v_1, \dots, v_k$ lin. indip. ma non più di k. Preso $v \in V$

qualsiasi ho $v, v_1, \dots, v_k$ sono lin dip

$\underset{LT}{\Longrightarrow} v \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$

$\Longrightarrow v_1, \dots, v_k$ generano $\Longrightarrow$ sono base $\Longrightarrow \dim(V) = k < +\infty$.

Assurdo. $\boxtimes$

COMPLETAMENTO

(Fissiamo V, $\dim(V) = n$)

Prop: dati $v_1, \dots, v_k \in V$ lin. indip. è possibile trovare $v_{k+1}, \dots, v_n$ t.c. $v_1, \dots, v_n$ sia base.

Dim:

$v_1, \dots, v_k$ l.i.
- $\to$ generano $\Longrightarrow$ sono base (non aggiungo)
- $\to$ non generano: $\exists\, v_{k+1}$ t.c. $v_{k+1} \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ $\underset{LT}{\Longrightarrow} v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ lin. indip.

$v_1, \dots, v_{k+1}$ l.i.
- $\to$ generano $\Longrightarrow$ sono base
- $\to$ $\exists\, v_{k+2}$ t.c. $v_{k+2} \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k, v_{k+1})$ $\underset{LT}{\Longrightarrow} v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}$ lin. indip.

Prosegue: quando arrivo a n vettori mi fermo poiché in V non esistono $n+1$ vettori lin. indip. $\boxtimes$

Es: $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : 7x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0\}$

$(\dim V = 3 - 1 = 2)$

Costruisco base: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>Oss</u>: ha senso completare $v_1, \dots, v_k$ a base di V <u>solo</u> se loro sono lin. indip.

<u>ESTRAZIONE</u>

Dati $v_1, \dots, v_k$ generatori di V il seguente procedimento porta a una base $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$ di V:

- esamino $v_1, v_2, \dots$ finché non trovo il primo $\neq 0$ e lo chiamo v_{i_1}
- esamino $v_{i_1+1}, v_{i_1+2}, \dots$ finché non trovo il primo non multiplo di v_{i_1} e lo chiamo v_{i_2}
- esamino $v_{i_2+1}, v_{i_2+2} \dots$ finché non trovo il primo non appartenente a $\mathrm{Span}(v_{i_1}, v_{i_2})$ e lo chiamo v_{i_3}

avanti fino alla fine. Funziona perché:

- $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$ lin. indip. per L1
- generano perché ad ogni istante il generato dei

vettori fermati è uguale al prodotto di tutti quelli esaminati (grazie L2).

Es: $V=\mathbb{R}^3$ $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}7\\-1\\1/2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-14\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4\\-3\\11/2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}7\\\pi\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4\\2\\-5\end{pmatrix}$

✗ ✗ ✓ ✗ ✗ ✓ ✗ ✗ ✗ ✓ ✗ ✗

$-2v_3$ $\qquad$ $v_3 - v_6$

$$\begin{cases} 7\alpha + 3\beta = 1 \\ -\alpha + 2\beta = 0 \ \checkmark \\ \frac{1}{2}\alpha - 5\beta = 0 \ \checkmark \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \beta - 5\beta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ 7\alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \quad \text{NO}$$

Esercizi dire se sono lin. indip.

$\boxed{4.2.1}$ (e) $\begin{pmatrix}6\\-7\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ SI

(f) $\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ [No: in $\mathbb{R}^2$ 3 vett. sempre lin. dip.]

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ -3\alpha + 5\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -2\beta - 3\gamma \\ 6\beta + 9\gamma + 5\beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11\beta + 11\gamma = 0 \\ \alpha = -2\beta - 3\gamma \end{cases}$$

ad. es. ho soluz. $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\alpha = 1$

($v_3 = v_1 + v_2$)

$\boxed{4.2.2}$ (a) $\begin{pmatrix}5\\6\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}10\\12\\-5\end{pmatrix}$ SI

(b) $\begin{pmatrix}4\\5\\-3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}7\\12\\-10\end{pmatrix}$ No

OK $\quad$ OK $\quad$ $v_3 = 2v_1 - v_2$

$$\begin{cases} 4\alpha+\beta=7 \\ 5\alpha-2\beta=12 \\ -3\alpha+4\beta=-10 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta=-4\alpha+7 \\ 13\alpha=26 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=-1 \\ -6-4=-10 \end{cases}$$ ok

(d) $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

OK OK

$$\begin{cases} 6\alpha+8\beta=5 \\ -\alpha-7\beta=2 \quad ✓ \\ 3\alpha+\beta=4 \quad ✓ \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha=3/2 \\ \beta=-7/10 \end{cases}$$ No

Sì

$\boxed{4.2.3}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 13 \\ -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

OK OK

$v_3 \overset{?}{=} 3\cdot v_2-\frac{2}{3}v_1$ No

Sì

(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

OK OK OK

$V_4 \overset{?}{=} \frac{1}{3}V_3+2V_2-\frac{5}{3}V_1$ No

Sì

$\boxed{4.2.4}$ (b) $-3+4t+t^2$ $\quad 6-8t+2t^2$

OK OK

Sì

(d) $t+5t^2-t^4$, $\quad 2t-t^2+3t^4$, $\quad -t+2t^2-5t^4$ $\quad \in \underbrace{\mathrm{Span}(t,t^2,t^4)}_{\dim=3}$

OK OK OK

$$\begin{cases} \alpha+2\beta=-1 \\ 5\alpha-\beta=2 \\ -\alpha+3\beta=-5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha=3/11 \\ \beta=-7/11 \\ -\frac{3}{11}-\frac{21}{11}=-5 \end{cases}$$ No

Sì

Esibire base dello spazio dato.

$\boxed{4.2.7}$ $V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ -4x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \end{array} \right\}$

Sottospazio di $\mathbb{R}^3$ (dim = 3) definito da 2 equaz. lin.: dimensione attesa è $3 - 2 = 1$ [vero se le equaz sono indip. tra loro]

$$x \in V \iff \begin{cases} x_2 = 4x_1 - 7x_3 \\ 3x_1 + 8x_1 - 14x_3 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 11x_1 = 19x_3 \\ x_2 = 4x_1 - 7x_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = \frac{19}{11} x_3 \\ x_2 = \frac{76 - 77}{11} x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{19}{11} x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{11} x_3 \end{cases}$$

$$\iff x = \begin{pmatrix} 19/11 \\ -1/11 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_3 \iff x \in \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 19/11 \\ -1/11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff x \in \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Base: $\begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$

oppure: $\begin{pmatrix} 19/11 \cdot \pi \\ -\pi/11 \\ \pi \end{pmatrix}$

$\boxed{4.2.8}$ $V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 5x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{array} \right\}$

dimensione attesa: $3 - 3 = 0$ [Vero solo se le equaz. sono indip.]

$$x \in V \iff \begin{cases} x_2 = 2x_1 + 5x_3 \\ -9x_1 - 33x_3 = 0 \\ -3x_1 - 11x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 2x_1 + 5x_3 \\ 3x_1 + 11x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -11/3\, x_3 \\ x_2 = -7/3\, x_3 \end{cases} \iff x = \begin{pmatrix} -11/3 \\ -7/3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_3$$

$\iff x \in \mathrm{Span}\begin{pmatrix}11\\7\\-3\end{pmatrix}.$

Verifico: $22-7-15$ ✓
$55-49-6$ ✓
$33-21-12$ ✓

$\boxed{4.2.10}$ $V=\{x\in\mathbb{R}^4 : 5x_1-8x_2+2x_3-3x_4=0\}.$

dimensione attesa: $4-1=3$

[vero purché equaz. non sia $0=0$.]

$x\in V \iff x_3 = -\frac{5}{2}x_1 + 4x_2 + \frac{3}{2}x_4$

parametri liberi che servono a individuare un qualsiasi vettore $x\in V$

$$\iff x = \begin{pmatrix}1\\0\\-5/2\\0\end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix}0\\1\\4\\0\end{pmatrix}x_2 + \begin{pmatrix}0\\0\\3/2\\1\end{pmatrix}x_4$$

$$\iff x \in \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-5/2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\3/2\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\iff x \in \mathrm{Span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\-5\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\4\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\3\\2\end{pmatrix}}\right)$$

lin. indip. $\Rightarrow$ base $\Rightarrow \dim(V)=3.$

$\boxed{4.2.13}$ $V=\left\{x\in\mathbb{R}^4 : \begin{cases}2x_1+4x_2+7x_3-9x_4=0\\-5x_1+6x_2+3x_3+2x_4=0\\9x_1+2x_2+11x_3-20x_4=0\end{cases}\right\}$

dim. attesa $4-3=1$

[vero se equaz. indip.]

$$x\in V \iff \begin{cases}x_2 = \frac{1}{2}(-9x_1-11x_3+20x_4)\\2x_1-18x_1-22x_3+40x_4+7x_3-9x_4=0\\-5x_1-27x_1-33x_3+60x_4+3x_3+2x_4=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}-16x_1-15x_3+31x_4=0\\\cancel{-32x_1-30x_3+62x_4=0}\\x_2=\frac{1}{2}(-9x_1-11x_3+20x_4)=0\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_4 = \frac{16}{31} x_1 + \frac{15}{31} x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}\left(-9x_1 - 11x_3 + \frac{320}{31} x_1 + \frac{300}{31} x_3\right) \\ \quad = \frac{41}{62} x_1 - \frac{41}{62} x_3 \end{cases}$$

2 param liberi che descrivono qualsiasi $x \in V$

$$\Longleftrightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 41/62 \\ 0 \\ 16/31 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -41/62 \\ 1 \\ 15/31 \end{pmatrix} \cdot x_3$$

$$\Longleftrightarrow x \in \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 41/62 \\ 0 \\ 16/31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -41/62 \\ 1 \\ 15/31 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Longleftrightarrow x \in \mathrm{Span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 62 \\ 41 \\ 0 \\ 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -41 \\ 62 \\ 30 \end{pmatrix}}_{\text{lin. indip.} \Longrightarrow \text{base} \Longrightarrow \dim = 2}\right)$$

Proposta: trovare α, β t.c. III equaz $= \alpha \cdot \mathrm{I} + \beta \cdot \mathrm{II}$.

Esempio: $V = \left\{ x \in \mathbb{R}^? : \begin{array}{l} x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 9x_4 = 0 \\ \pi x_1 - 5\pi x_2 + 7\pi x_3 - 9\pi x_4 = 0 \\ -10x_1 + 50x_2 - 70x_3 + 90x_4 = 0 \end{array} \right\}$

$\cancel{\dim = 4 - 3 = 1}$

$\dim = 4 - 1 = 3$

$x \in V \Longleftrightarrow x_1 = 5x_2 - 7x_3 + 9x_4$ par. liberi:

$$\Longleftrightarrow x = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \in \operatorname{Span}\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{lin. indip} \to \text{base} \to \dim = 3} \Bigg)$$