Algebra Lineare 22/10/13

Prossimi merc:

23/10 3x10

30/10 3xGG — dalle 11

V sp. vett. su $\mathbb{R}$

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è base se: $n \in \mathbb{N}$, ordinati

- lin. indip. (l'unica comb. lin. con risultato 0 è quella banale)
- generano (ogni $v \in V$ è comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$

$\Rightarrow$ ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ con $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$; poniamo $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$ coordinate di v risp. a $\mathcal{B}$.

Dunque: se riesco a scrivere v come $x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ tali $x_1, \dots, x_n$ danno $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ che è $[v]_{\mathcal{B}}$.

Prop: data $\mathcal{B}$ base di V la
$$[\cdot]_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$v \longmapsto [v]_{\mathcal{B}}$$
è una biiezione che rispetta le operazioni.

Cioè: "fissata $\mathcal{B}$ base di V abbiamo una identificazione di V con $\mathbb{R}^n$ come sp. vett."

Dim : iniettiva : devo vedere che se $[v]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}}$ allora $v = u$.

Infatti se $[v]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ho

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

$$u = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \qquad \Longrightarrow v = u$$

surgettiva : dato $x \in \mathbb{R}^n$ cerco v t.c. $[v]_{\mathcal{B}} = x$;

basta porre $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$.

$[0]_{\mathcal{B}} = 0$: $\quad 0 = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n$

$[v+u]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}} + [u]_{\mathcal{B}}$: se $[v]_{\mathcal{B}} = x$ cioè $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$[u]_{\mathcal{B}} = y$ cioè $u = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$

$v + u = (x_1 + y_1) v_1 + \dots + (x_n + y_n) \cdot v_n$

$$\Longrightarrow [v+u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = x + y .$$

$[\lambda \cdot v]_{\mathcal{B}} = \lambda \cdot [v]_{\mathcal{B}}$: ... $\blacksquare$

Teo : se V ammette basi esse hanno tutte lo stesso numero di elementi.

($\Longrightarrow$ ha senso definire $\dim_{\mathbb{R}}(V) =$ tale numero.)

Prop : $A(p)$: dati in V p vettori $v_1, \dots, v_p$ lin. indip

se $v_1, \dots, v_p \in \operatorname{Span}(w_1, \dots, w_q)$ allora $q \geq p$.

Dim del Teo usando la Prop. : siano $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_p)$, $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_q)$

basi di V, cioè :

- $v_1, \dots, v_p$ lin. indip
- $v_1, \dots, v_p$ generano

Prop: $p \geq q$

- $w_1, \dots, w_q$ lin. indip
- $w_1, \dots, w_q$ generano

Prop: $q \geq p$

$\Rightarrow p = q.$ $\boxtimes$

---

dati in V p vettori $v_1, \dots, v_p$ lin. indip
se $v_1, \dots, v_p \in \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_q)$ allora $q \geq p$. $\Big\}$ $A(p)$

Dimostro che $A(p)$ è vera $\forall p \in \mathbb{N}$ per induzione.

PB : $p = 0$: $q \geq 0$ sempre vera

PB bis : $p = 1$: v_1 lin. indip. cioè $v_1 \neq 0$;
$v_1 \in \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_q)$; dobbiamo provare
che $q \geq 1$; se per assurdo fosse $q = 0$
avrei $\mathrm{Span}(\emptyset) = \{0\}$, però $v_1 \notin \{0\}$. ok

PI : dimostro che $A(p) \to A(p+1)$. Cioè suppongo
noto che : dati in V p vettori $v_1, \dots, v_p$ lin. indip
se $v_1, \dots, v_p \in \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_q)$ allora $q \geq p$.

devo dimostrare che presi $p+1$ $\overbrace{\text{vettori}}^{\text{(lin. indip.)}}$ che stanno nel prodotto di m vettori ho $m \geq p+1$; cioè che presi vettori $x_0, \dots, x_p$ lin. indip. e $y_1, \dots, y_m$ t.c. $x_0, \dots, x_p \in \mathrm{Span}(y_1, \dots, y_m)$ ho $m \geq p+1$. So che posso scrivere

$$x_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji}\, y_i \qquad j = 0, \dots, p.$$

So $x_0, \dots, x_p$ lin. indip. $\Rightarrow x_0 \neq 0 \Rightarrow$ qualcuno dei coeff α_{0i} $i = 1 \dots m$ è $\neq 0$; poiché l'ordine di $y_1, \dots, y_m$ è irrilevante posso riordinarli e dunque supporre che $\alpha_{01} \neq 0$; ora pongo

$$\boxed{v_j = x_j - \frac{\alpha_{j1}}{\alpha_{01}} \cdot x_0 \qquad j = 1, \dots, p}$$

Affermo che: (1) $v_1, \dots, v_p$ sono lin. indip.

(2) $v_1, \dots, v_p \in \mathrm{Span}(y_2, \dots, y_m)$

Fatto questo applico l'ipotesi induttiva concludendo che

$$m - 1 \geq p \Rightarrow m \geq p+1.$$

Verifico dunque le due proprietà:

(1) devo vedere che le uniche costanti $\beta_1, \dots, \beta_p$ t.c. $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_p v_p = 0$ sono $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$; infatti $\beta_1 \left(x_1 - \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{01}} x_0\right) + \beta_2 \left(x_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{01}} x_0\right) + \dots + \beta_p \left(x_p - \frac{\alpha_{p1}}{\alpha_{01}} x_0\right) = 0$

$$\left(\dots \right) x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p = 0$$

ma $x_0, x_1, \dots, x_p$ sono lin. indip. $\Rightarrow$ tutti i coeff sono 0

$\Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$.

(2) devo vedere che $v_j \in \mathrm{Span}(y_2, \dots, y_m)$ $\forall j = 1 \dots m$:

$$v_j = x_j - \frac{\alpha_{j1}}{\alpha_{01}} x_0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} y_i - \frac{\alpha_{j1}}{\alpha_{01}} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{0i} \cdot y_i$$

$$= \left(\alpha_{j1} \cdot y_1 + \sum_{i=2}^{m} \alpha_{ji} y_i \right) + \left(- \frac{\alpha_{j1}}{\alpha_{01}} \cdot \alpha_{01} \cdot y_1 - \frac{\alpha_{j1}}{\alpha_{01}} \sum_{i=2}^{m} \alpha_{0i} y_i \right)$$

$$= \sum_{i=2}^{m} \left(\alpha_{ji} - \frac{\alpha_{j1}}{\alpha_{01}} \alpha_{0i} \right) y_i .$$

OK

$\boxed{///}$

Oss: dati $x_0, \dots, x_p \in \mathrm{Span}(y_1, \dots, y_m)$ dovevo cercare $v_1, \dots, v_p \in \mathrm{Span}(\text{altri})$ per usare ip. induttiva.
Potevo definire $v_1, \dots, v_p$ scartando uno degli x_j; però tutto quello che potevo dire era $v_1, \dots, v_p \in \mathrm{Span}(y_1, \dots, y_m)$ ma allora ip. induttiva avrebbe detto $m \geq p$ mentre ci serve $m \geq p+1$; l'idea è quindi non di scartare un x_j ma di definire $v_1, \dots, v_p$ usando i coeff. in modo che $v_1, \dots, v_p \in \mathrm{Span}(y_2, \dots, y_m)$ –

Teo: se V ha basi tutte hanno stesso numero di el'ti

Def: lo chiamo $\dim_{\mathbb{R}}(V) \in \mathbb{N}$.

Se $V = \{0\}$ convengo che $\emptyset$ e $\{\}$ siano una base dunque che $\dim_{\mathbb{R}}(\{0\}) = 0$. ($\{0\}$ = un punto).

Oss: se $\dim_{\mathbb{R}}(V) > 0$ ho $V \neq \{0\}$.

Se V ha basi diciamo che ha dimensione finita e scriviamo $\dim_{\mathbb{R}}(V) < +\infty$; altrimenti dim. infinita $\dim_{\mathbb{R}}(V) = +\infty$.

Visto: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[t]) = +\infty$.

---

cioè $w_1 \ldots w_k$ sono base di W.

Dire se $w_1, \ldots, w_k$ generano W e se ogni $w \in W$ ha espressione unica come loro comb. lin.

$\boxed{4.1.5}$ (c) $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0\}$

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Verifico intanto che ha senso, cioè $w_1, w_2, w_3 \in W$:

$-1 + 3 - 2 = 0$ ✓

$3 - 3 = 0$ ✓

$6 - 6 = 0$ ✓

Dato $x \in W$ qualsiasi, cioè $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ con $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$

vedo se riesco a scriverlo come $\alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3$:

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta = x_1 & \checkmark \\ \alpha - \beta + 2\gamma = x_2 & \checkmark \\ \alpha + 3\gamma = x_3 & \checkmark \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 3\beta - x_1 & \checkmark \\ 3\beta - x_1 + 3\gamma = x_3 & \checkmark \\ \alpha - \beta + 2\gamma = x_2 & \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma = -\beta + \frac{1}{3}(x_1 + x_3) \\ \alpha = 3\beta - x_1 \\ \cancel{3\beta} - x_1 \cancel{-\beta} \cancel{-2\beta} + \frac{2}{3}(x_1 + x_3) = x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 3\beta - x_1 \\ \gamma = -\beta + \frac{1}{3}(x_1 + x_3) \\ -3x_1 + 2x_1 + 2x_3 = 3x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 3\beta - x_1 \\ \gamma = -\beta + \frac{1}{3}(x_1 + x_3) \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 3\beta - x_1 \\ \gamma = -\beta + \frac{1}{3}(x_1 + x_3) \end{cases}$$

infinite soluzioni

Sì/No [Non è base: sono generatori ma non sono lin. indip.]

(d) $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : 6x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0\}$ $\quad u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ha senso: $6 \cdot 2 - 5 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) = 0$ ✓

Dato $x \in W$ cioè t.c. $6x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0$ cerco α t.c.

$x = \alpha \cdot w_1$ cioè $\begin{cases} 2\alpha = x_1 \\ 3\alpha = x_2 \\ -\alpha = x_3 & \checkmark \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -x_3 \\ 2\alpha = x_1 \\ 3\alpha = x_2 \end{cases}$

$\alpha = -x_3$ è una soluzione se $x_1 = -2x_3$

$x_2 = -3x_3$.

Non è sempre vero: $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ ma tali relaz. non valgono.

No: non genera; però è lin. indip.

4.1.6 (a) $W=\{x\in\mathbb{R}^4 : x_1+3x_2+x_3-x_4=0\}$ $w_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\5\end{pmatrix}$ $w_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$

Ha senso: $1+3+1-5=0$ ✓

$2-3+1=0$ ✓

Dato $x\in W$ cioè t.c. $x_1+3x_2+x_3-x_4=0$ cerco α,β t.c.

$$\begin{cases}\alpha+2\beta=x_1 & ✓\\ \alpha-\beta=x_2 & ✓\\ \alpha+\beta=x_3 & ✓\\ 5\alpha=x_4 & ✓\end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha=\frac{1}{5}x_4\\ \beta=\frac{1}{5}x_4-x_2\\ \frac{3}{5}x_4-2x_2=x_1\\ \frac{2}{5}x_4-x_2=x_3\end{cases}$$

la soluz. va bene se tutti gli $x\in W$ soddisfano:

$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ non soddisfa.

Fatto: se in $\mathbb{R}^n$ prendo un sottospazio definito da una sola equazione lineare non banale allora il sottosp. ha dim. $n-1$.

Nell'esercizio:

$W=\{x\in\mathbb{R}^4 : x_1+3x_2+x_3-x_4=0\}$ $\underbrace{w_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\5\end{pmatrix} \quad w_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}}$

dim $=3$

non possono essere base (ma sono lin. indip.)

Per verificare che non generano cerco un vettore che non sia

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) $W = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{array} \right\}$ $\quad w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ha senso:

$$-2 - 39 + 40 + 1 = 0 \ \checkmark$$
$$-5 + 13 - 10 + 2 = 0 \ \checkmark$$
$$-2 - 12 + 8 + 2 \neq 0$$
$$-5 + 4 - 2$$

<u>No</u>

$\boxed{4.1.7}$ (b) $W = \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ $\quad w_1 = 1 - t + t^2$, $\quad w_2 = 2 + 3t - 2t^2$

base canonica $1, t, t^2$ $\Rightarrow \dim = 3$

Non possono essere base ma sono lin. indip $\Rightarrow$ non generano.

Ad esempio: $1 = \alpha(1 - t + t^2) + \beta(2 + 3t - 2t^2)$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \ \checkmark \\ -\alpha + 3\beta = 0 \ \checkmark \\ \alpha - 2\beta = 0 \ \checkmark \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 2\beta \ \checkmark \\ 5\beta = 0 \ \checkmark \\ \alpha + 2\beta = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \alpha + 2\beta = 1 \end{cases}$$ <u>No</u>

$1 \notin \operatorname{Span}(w_1, w_2)$

(d) $W = \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ $\quad w_1 = 2 + 7t^2 \quad w_2 = 1 - t \quad w_3 = 5t - t^2$

dim = 3

3 vettori: possono essere base

Dato $p(t) = a + bt + ct^2$ cerco α, β, γ t.c.

$p(t) = \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3$ cioè:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = a \quad \checkmark \\ -\beta + 5\gamma = b \quad - \\ 7\alpha - \gamma = c \quad \checkmark \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = 7\alpha - c \\ \beta = -2\alpha + a \\ 2\alpha - a + 35\alpha - 5c = b \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} \alpha = \dfrac{a + b + 5c}{37} \\ \beta = \dfrac{35a - 2b - 10c}{37} \\ \gamma = \dfrac{7a + 7b - 33c}{37} \end{cases}\right\} \text{verificare conti}$$

SÌ / SÌ (base)