Algebra Lineare 16/10/19

V sp. vett, $S \subset V$: esiste unico $\mathrm{Span}(S)$ (pem. 1.6)
il più piccolo sottosp. vett. che contiene S.

$$\mathrm{Span}(v_1,\dots,v_m) = \{ \underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m}_{\text{comb. lin.}} : \lambda_1,\dots,\lambda_m \in \mathbb{R} \}$$

<u>Esercizi</u>: dire se $v \in \mathrm{Span}(w_1,\dots,w_m)$; se sì dire se
l'espr. di v come comb. lin. di $w_1,\dots,w_m$ sia unica.

$\boxed{4.1.1}$ (e) $\quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \underline{w_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \underline{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \underline{v_3} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

Esistono α, β, γ t.c. $\begin{cases} -2\alpha + \beta - 6\gamma = 4 \\ 7\alpha - 2\beta + 5\gamma = -3 \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \beta = 2\alpha + 6\gamma + 4 \\ 7\alpha - 4\alpha - 12\gamma - 8 + 5\gamma = -3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - 7\gamma = 5 \\ \beta = 2\alpha + 6\gamma + 4 \end{cases}$$

Il sistema ha soluzioni, non unica:

$\alpha = 0$
$\gamma = -5/7$
$\beta = -2/7$

$\gamma = 0$
$\alpha = 5/3$
$\beta = 22/3$

Sì / No

$\boxed{4.1.2}$ $\mathbb{R}^3$

(c) $V = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ $w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \\ 8 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$

Ci chiediamo se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{cases} 2\alpha + 6\beta = 4 \\ -13\alpha + \beta = -2 \\ 8\alpha + 3\beta = 7 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \beta = 13\alpha - 2 \\ \alpha + 39\alpha - 6 = 2 \\ 8\alpha + 117\alpha - 18 = 7 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 40\alpha = 8 \\ 125\alpha = 25 \\ \beta = 13\alpha - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1/5 \\ \beta = 3/5 \end{cases}$$

Sì/no

$\boxed{4.1.3}$ $\mathbb{R}[t]$

(b) $v = 1 - 2t + 3t^2$ $w_1 = 4 + t - t^2$ $w_2 = -3 + 2t + t^2$

Mi chiedo se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \alpha w_1 + \beta w_2$, cioè

$$1 - 2t + 3t^2 = \alpha(4 + t - t^2) + \beta(-3 + 2t + t^2)$$ cioè

$$1 - 2t + 3t^2 = (4\alpha - 3\beta) + (\alpha + 2\beta)t + (-\alpha + \beta)t^2$$ cioè

$$\begin{cases} 4\alpha - 3\beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = -2 \\ -\alpha + \beta = 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \beta = 3 + \alpha \\ 4\alpha - 9 - 3\alpha = 1 \\ \alpha + 6 + 2\alpha = -2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = 10 \\ 3\alpha = -8 \\ \dots \end{cases}$$

nessuna soluz $\Longrightarrow$ No

(c) $r = 7 + t - t^2$ $w_1 = 5 - t + 2t^2$ $w_2 = -2 - 2t + 3t^2$ $w_3 = 1 - 5t + 8t^2$

Mi chiedo se esistono α, β, γ t.c.

$$\begin{cases} 5\alpha - 2\beta + \gamma = 7 \\ -\alpha - 2\beta - 5\gamma = 1 \\ 2\alpha + 3\beta + 8\gamma = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -2\beta - 5\gamma - 1 \\ \underline{-10\beta} \underline{-25\gamma} \underline{-5} \underline{-2\beta} \underline{+\gamma} = \underline{7} \\ \underline{-4\beta} \underline{-10\gamma} \underline{-2} \underline{+3\beta} \underline{+8\gamma} = \underline{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12\beta - 24\gamma = 12 \\ -\beta - 2\gamma = 1 \\ \alpha = -2\beta - 5\gamma - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta + 2\gamma = -1 \\ \alpha = -2\beta - 5\gamma - 1 \end{cases}$$

Ha infinite soluzioni, ad es.

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = 1 \\ \beta = -3 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Sì/no.

$\boxed{4.1.4}$ $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

(a) $v = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l} (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array} \begin{cases} 2\alpha + \beta = 2 \\ \gamma = 3 \\ \alpha - \gamma = -1 \\ -\alpha + 2\beta = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = 3 \\ \alpha = 2 \\ \beta = -2 \\ -2 - 4 = 7 \end{cases}$$

No

——— o ———

In generale dati $w_1, \dots, w_n \in V$ (sp. vett. fissato) ci possiamo chiedere se per $v \in \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_n)$ l'espressione di v come comb. lin. di $w_1, \dots, w_n$ sia unica. [Fatto: può essere sì o no, ma è la stessa $\forall v \in \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_n)$.]

Mi pongo la domanda per $0 \in \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_n)$:
certamente $0 = 0 \cdot w_1 + \dots + 0 \cdot w_n$

Def: chiamo $w_1, \dots, w_n$ linearmente indipendenti se l'unica loro comb. lin. che dà risultato 0 è quella con tutti i coeff. 0.

Es: $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

lin. indip.? Devo vedere se gli unici $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$ sono $\alpha = \beta = 0$. Cioè:

mi chiedo se $\begin{cases} 3\alpha + 4\beta = 0 \\ -7\alpha + 5\beta = 0 \end{cases}$ ha solo la soluz $\alpha = \beta = 0$

$$\iff \begin{cases} \alpha = -\frac{4}{3}\beta \\ \frac{28}{3}\beta + 5\beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{43}{3} \cdot \beta = 0 \\ \alpha = -\frac{4}{3}\beta \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Sì

Es: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ lin. indip.?

Mi chiedo se $\begin{cases} 2\alpha + 4\beta - 7\gamma = 0 \\ -\alpha + 5\beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$ ha solo la soluz. $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$$\begin{cases} \alpha = 5\beta + 3\gamma \\ 10\beta + 6\gamma + 4\beta - 7\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma = 14\beta \\ \alpha = 47\beta \end{cases}$$

No: ad es. $\beta = 1$, $\gamma = 14$, $\alpha = 47$ è soluz non $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Oss: la proprietà di essere lin. indip. non è dei singoli vettori ma del loro insieme.

Q: $w_1,\dots,w_m$ lin. indip?

$\boxed{m=1}$ $w \in V$; mi chiedo se l'unica soluz. α di $\alpha \cdot w = 0$ sia $\alpha = 0$; ciò accade per $w \neq 0$.

Oss: se $w_1,\dots,w_m$ sono lin. indip. allora lo sono anche $w_1,\dots,\underbrace{\widehat{w_i}}_{},\dots,w_m$

gli stessi di prima escluso w_i

Infatti: devo vedere che l'unica comb. lin. di $w_1,\dots,\widehat{w_i},\dots w_m$ con risultato nullo è quella con coeff. tutti nulli:

$$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_{i-1} w_{i-1} + \lambda_{i+1} w_{i+1} + \dots + \lambda_m w_m = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 w_1 + \dots \quad '' \quad + \underline{0} \cdot w_i + \quad '' \quad \dots = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0.$$

Conseguenza: se $w_1,\dots,w_m$ sono lin. indip. allora sono tutti $\neq 0$.

$\boxed{m=2}$ w, u lin. indip.?

- se uno è nullo, no;
- se entrambi non nulli, mi chiedo se esistono α, β

non entrambi nulli t.c. $\alpha w + \beta u = 0$;

se fosse $\alpha = 0$ avrei anche $\beta = 0$ e viceversa ;

mi chiedo se esistono α, β entrambi non nulli

t.c. $\alpha w + \beta u = 0$; in tal caso potrei scrivere

$w = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) \cdot u \qquad u = \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot w$. Conclusione:

due vettori sono lin. indip

$\Longleftrightarrow$ entrambi non nulli, non multipli uno dell'altro.

Es: $\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ lin. indip.

Es: $\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$ lin. dip. $(II = -\sqrt{3} \cdot I)$

Prop: $\underbrace{w_1, \dots, w_m \text{ lin. indip}}$ $\Longleftrightarrow$ ogni $v \in \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_m)$ ha espressione unica come loro comb. lin.

il vettore 0 ha espr. unica
come comb. lin.

Dimo: $\Longleftarrow$ ovvia.

$\Longrightarrow$: prendo v scritto come $v = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m$

$v = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m$

e mostro che le espressioni sono uguali. Infatti:

$$\underline{(\alpha_1 - \beta_1)} w_1 + \dots + \underline{(\alpha_m - \beta_m)} w_m = 0$$

Poiché $w_1,\dots,w_m$ sono lin. indip. ho

$$\alpha_1-\beta_1 = \alpha_2-\beta_2 = \dots = \alpha_m-\beta_m = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1=\beta_1, \quad \alpha_2=\beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_m=\beta_m.$$ ▨

Def: chiamo base di uno spazio vettoriale V un insieme finito e ordinato $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_m)$ di vettori di V che sia linearmente indipendente e che generi V.

conta l'ordine:

$\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\7\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\2\\-1\end{pmatrix}$ è base di $\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix}9\\2\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\7\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ è un'altra

- $v_1,\dots,v_m$ generano V : ogni vett. di V si può scrivere come comb. lin. di $v_1,\dots,v_m$

- $v_1,\dots,v_m$ lin. indip : ogni el. di $\mathrm{Span}(V)$ si scrive in modo unico come comb. lin. di $v_1,\dots,v_m$.

Fatto: $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_m)$ è base di V

$\Leftrightarrow$ ogni el. di V si scrive in modo unico come comb. lin. di $v_1,\dots,v_m$.

Def: se $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$ è base, dato $v\in V$ so che v si scrive in modo unico come $v=x_1v_1+\dots+x_nv_n$ con $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$. Chiamo

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$$

vettore delle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$, indicato $[v]_{\mathcal{B}}$.

Oss: per definire le coordinate è essenziale l'ordine.

Es: $\left(\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}\right)=\mathcal{B}$; verifico che $\mathcal{B}$ è base di $\mathbb{R}^2$ e calcolo $[v]_{\mathcal{B}}$.

- lin. indip: sì
- generano: dato $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ voglio trovare $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=x_1\cdot\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}+x_2\cdot\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$$

(so già che se li trovo sono unici):

$$\left\{\begin{array}{l}4x_1-5x_2=a\\ 7x_1+3x_2=b\end{array}\right| \qquad \text{(sistema nelle incognite } x_1,x_2 \text{ dati } a,b\text{)}$$

$$\begin{array}{l}3\cdot I+5\cdot II\\ -7I+4\cdot II\end{array}\quad\left\{\begin{array}{l}x_1=\dfrac{3a+5b}{12+35}\\ x_2=\dfrac{-7a+4b}{35+12}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}}=\frac{1}{47}\begin{pmatrix}3a+5b\\ -7a+4b\end{pmatrix}$$

$\boxed{4.1.5}$ (b) $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0\}$ $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}\right)$

Provare che $\mathcal{B}$ è base di W e trovare $[w]_{\mathcal{B}}$ $\forall w$.

Poiché W è sottospazio di $\mathbb{R}^3$ (non tutto $\mathbb{R}^3$) perché la domanda abbia senso bisogna che i vettori di $\mathcal{B}$ stiano in W (e non solo in $\mathbb{R}^3$):

$7 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = 0$ ✓

$7 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) = 0$ ✓

Ora prendo $w = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in W$ generico; so che $7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0$.

Cerco y_1, y_2 t.c. $x = y_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + y_2 \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}$

(si vede che i due vett non sono mult. fra loro
$\Rightarrow$ lin. indip $\Rightarrow$ y_1, y_2 se esistono sono unici).

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = x_1 \\ y_1 + 4y_2 = x_2 \\ -2y_1 - y_2 = x_3 \end{cases}$$

(sistema nelle incognite y_1, y_2 dati x_1, x_2, x_3 con $7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0$)

$$\begin{cases} y_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \\ y_1 = 2x_1 - x_2 \\ -4x_1 + 2x_2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ - \\ 8x_1 - 4x_2 + x_2 - x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ - \\ 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \underline{\text{ok}}$$

Dunque è base e $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix}$.

Per alcuni spazi vettoriali ho una <u>base canonica</u> (la più naturale di tutte).

$\boxed{\mathbb{R}^n}$ $\qquad \mathcal{E}_n = \left(e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}\right)$

$$e_1^{(n)} = \left.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} n \qquad e_2^{(n)} = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} n$$

(Se n è chiaro dal contesto scrivo solo e_i.)

Verifico che è base e trovo $[x]_{\mathcal{E}_n}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boxed{x_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{x_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{x_3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \boxed{x_n}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dunque $\quad [x]_{\mathcal{E}_n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x$

in $\mathbb{R}^n$: "coord. risp. <u>a base canonica</u> = componenti"

Delta di K.: $\quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$.

$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \qquad : \qquad (e_i)_j = \delta_{ij}$

Teorema: se V ammette basi allora tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi.

Def: tale numero si chiama dimensione di V indicata $\dim_{\mathbb{R}}(V)$.

Visto: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Inoltre:

$$\dim(\mathbb{R}^2) = 2$$
$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$$
$$\dim\left(\{x \in \mathbb{R}^3 : 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0\}\right) = 2$$

è sottospazio di $\mathbb{R}^3$ avente dimensione 2 — come $\mathbb{R}^2$: lo chiamo piano.

$\boxed{\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})}$ $\qquad \mathcal{E}_{m\times n} = (E_{ij})_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots m}}$

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccc} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & & \uparrow & & \\ & & j & & \end{array} & \end{array}$$

$$(E_{ij})_{pq} = \delta_{ip} \cdot \delta_{jq}$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots m}} = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \dots + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22} \dots$$

di nuovo: le coord. di A rispetto a $\mathcal{E}_{m\times n}$ sono i suoi coeff

Conseguenze $\dim_{\mathbb{R}}\left(M_{m\times n}(\mathbb{R})\right) = m\cdot n$.

$\boxed{\mathbb{R}_{\le d}[t]}$ $\quad \mathbb{R}_{\le d}[t] = \left\{a_0 + a_1\cdot t + a_2\cdot t^2 + \dots + a_d t^d : a_0,\dots,a_d \in \mathbb{R}\right\}$

Base canonica: $1, t, t^2, t^3, \dots, t^d$:

$$a_0 + a_1\cdot t + a_2\cdot t^2 + \dots + a_d t^d = \boxed{a_0}\cdot 1 + \boxed{a_1}\cdot t + \boxed{a_2}\cdot t^2 + \dots + \boxed{a_d}\cdot t^d$$

dunque le coord. di un polinomio rispetto a tale base sono i suoi coefficienti.

Conseguenza: $\dim_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}_{\le d}[t]\right) = d+1$.

Prop: $R[t]$ non ha insiemi finiti di generatori ($\Rightarrow$ non ha basi).

Dimo: per assurdo supponiamo che ci sia un insieme $p_1(t), p_2(t), \dots, p_m(t)$ che generi.

Cerchiamo un vettore che non si possa esprimere come comb. lin. di $p_1(t), \dots, p_m(t)$ (da cui assurdo).

Es: $\sqrt{3} - 5t + 8t^{19}$

$2 - 7t^2 + 11t^{51} - \sqrt{5}\cdot t^{1000}$

$t - 2t^2 + t^3 + 9t^{73}$

certamente $t^{1001} \notin \mathrm{Span}(\text{questi tre})$

prendo $k > \max\{\deg(p_j(t)) : j = 1..n\}$ allora

$$t^k \notin \mathrm{Span}(p_j(t) \quad j = 1 \dots n) \,. \qquad \boxtimes$$

Prop: se V ha base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ la funzione

$$\begin{aligned} [\cdot]_{\mathcal{B}} : V &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\longmapsto [v]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

il posto in cui scrivere l'argomento

è bigettiva e rispetta le operazioni di sp. vett.:

- $[\underset{V}{0}]_{\mathcal{B}} = \underset{\mathbb{R}^n}{0}$
- $[\underset{V}{v+w}]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}} \underset{\mathbb{R}^n}{+} [w]_{\mathcal{B}}$
- $[\lambda \underset{V}{\cdot} v]_{\mathcal{B}} = \lambda \underset{\mathbb{R}^n}{\cdot} [v]_{\mathcal{B}}$

Cioè: usando $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ posso identificare V a $\mathbb{R}^n$.

Cioè: uno sp. vett. di dimensione n su $\mathbb{R}$ si può identificare a $\mathbb{R}^n$ come spazio vettoriale (via $[\cdot]_{\mathcal{B}}$).

Es: $\mathcal{F}(\{a, b, c\}, \mathbb{R})$.

$$A : \begin{cases} a \mapsto 1 \\ b \mapsto 0 \\ c \mapsto 0 \end{cases} \qquad B : \begin{cases} a \mapsto 0 \\ b \mapsto 1 \\ c \mapsto 0 \end{cases} \qquad C : \begin{cases} a \mapsto 0 \\ b \mapsto 0 \\ c \mapsto 1 \end{cases}$$

Affermo che (A,B,C) è base di $\mathcal{F}(\{a,b,c\}, \mathbb{R})$: data f cerco costanti α, β, γ t.c.

$$f = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C \qquad \left(\text{entrambe sono in } \mathcal{F}(\{a,b,c\},\mathbb{R})\right)$$

ovvero che due hanno stesso valore in:

a: $f(a) = \alpha$

b: $f(b) = \beta$

c: $f(c) = \gamma$

Dunque è base e $[f]_{(A,B,C)} = \begin{pmatrix} f(a) \\ f(b) \\ f(c) \end{pmatrix}$.

Conseguenza: se anziché $f \in \mathcal{F}(\{a,b,c\}, \mathbb{R})$ scrivo $\begin{pmatrix} f(a) \\ f(b) \\ f(c) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sto identificando $\mathcal{F}(\{a,b,c\}, \mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^3$ in modo fedele e rispettando tutta la struttura di spazio vettoriale.