Algebra lineare 15/10/19

V sp. vett. ; $W \subset V$ sottosp. vett. se
- $0 \in W$
- $w_1, w_2 \in W$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W$.

———— o ————

$V = \mathbb{R}[t] \qquad d \in \mathbb{N}$

- $\mathbb{R}_{\leq d}[t] = \{ p(t) \in \mathbb{R}[t] : \deg(p(t)) \leq d \}$
  - $0 \in \mathbb{R}_{\leq d}[t]$
  - ... ✓

$\{0\} \cup \{ p(t) \in \mathbb{R}[t] : \deg(p(t)) \}$ Non è sottosp

- Un polinomio $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ è anche una funzione
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t_0 \longmapsto p(t_0) = a_0 + a_1 \cdot t_0 + \cdots + a_n \cdot t_0^n$$

$W = \{ p(t) \in \mathbb{R}[t] : p(-2) = 0 \}$

$p(t) = a_0 + a_1 \cdot t + \cdots + a_n \cdot t^n \qquad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$p(-2) = 0 \quad : \quad \underbrace{a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 \cdots + (-2)^n \cdot a_n = 0}_{|}$

equazione lineare (pol. omog. I grad) nei coeff $a_0, a_1, \dots, a_n$

Fatto: i coeff. di un polinomio $p(t)$ giocano il ruolo che le componenti hanno per un vettore $x \in \mathbb{R}^n$.

W sottosp.: $\cdot\ 0 \in W$ ✓

$\cdot\ p(t), q(t) \in W \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \overset{?}{\Rightarrow} \alpha p(t) + \beta q(t) \in W.$

$p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$

$q(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n$

so: $a_0 - 2a_1 + 4a_2 + \dots = 0$

$b_0 - 2b_1 + 4b_2 + \dots = 0$

$\alpha p(t) + \beta q(t)$

$= (\alpha a_0 + \beta b_0) + (\alpha a_1 + \beta b_1) \cdot t + (\alpha a_2 + \beta b_2) \cdot t^2 + \dots$

$(\alpha a_0 + \beta b_0) - 2(\alpha a_1 + \beta b_1) + 4(\alpha a_2 + \beta b_2) + \dots$

OK fa 0.

- Derivazione: $p(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$; pong.

$$p'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot a_k \cdot t^{k-1}.$$

$W = \{ p(t) \in \mathbb{R}[t] : \quad p''(5) = 0 \}$

$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots$

$p'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \dots$

$p''(t) = 2a_2 + 6a_3 t + 12 a_4 t^2 + \dots$

$p''(5) = 0 \quad : \quad \underbrace{2a_2 + 30a_3 + 300a_4 + \dots = 0}$

equaz. lin. nei coeff.

$\Rightarrow$ definisce sottospazio.

$V = \mathcal{F}(\{a,b,c\}, \mathbb{R})$

$W = \{ f \in V : \underbrace{3f(a) - 5f(b) + 7f(c) = 0} \}$

equaz. lin. nei valori di f su $\{a,b,c\}$ che giocano il ruolo delle componenti di $x \in \mathbb{R}^n$

- $0 \in W$ ✓
- $f, g \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\alpha f + \beta g \in W$

so: $3f(a) - 5f(b) + 7f(c) = 0$

$3g(a) - 5g(b) + 7g(c) = 0$

$3(\alpha f + \beta g)(a) - 5(\alpha f + \beta g)(b) + 7(\alpha f + \beta g)(c) \overset{?}{=} 0$

$3(\alpha f(a) + \beta g(a)) - 5(\alpha f(b) + \beta g(b)) + 7(\alpha f(c) + \beta g(c)) \overset{?}{=} 0$

Sì

- $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \ni a$ è detta successione e si scrive $a = (a_n)_{n=0}^{+\infty}$ (scriviamo a_n invece di $a(n)$).

$W = \{ a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : \underline{a_{n+2} = a_n + a_{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \}$

$$\underbrace{a_n + a_{n+1} - a_{n+2} = 0}$$

$\forall n$ è equazione lineare nei valori di a

$\Rightarrow$ è un sottospazio.

Verifica: $\cdot\ 0 \in W$ ✓

$\cdot\ a, b \in W,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha a + \beta b \in W$

so: $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}\ \forall n$

$b_{n+2} = b_n + b_{n+1}\ \forall n$

$$(\alpha a + \beta b)_{n+2} \overset{?}{=} (\alpha a + \beta b)_n + (\alpha a + \beta b)_{n+1} \quad \forall n$$

$$\alpha a_{n+2} + \beta b_{n+2} \overset{?}{=} \alpha a_n + \beta b_n + \alpha a_{n+1} + \beta b_{n+1}$$

Sì

- $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$; chiamo sua trasposta la matrice

$${}^tA \in M_{n \times m}(\mathbb{R}) \quad \text{data da: } ({}^tA)_{ij} = (A)_{ji}.$$

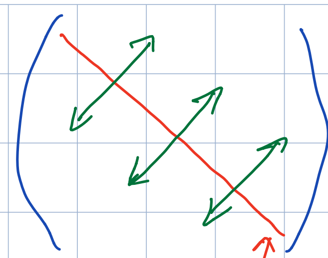
${}^tA$ ottenuta da A scambiando righe con colonne e vic:

$${}^t\begin{pmatrix} -7 & \pi & \sqrt{3} \\ 11/4 & 9 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 11/4 \\ \pi & 9 \\ \sqrt{3} & e \end{pmatrix}$$

- $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$ "quadrate"

$S_n = \{A \in V : {}^tA = A\}$ "simmetriche"

$A_n = \{A \in V : {}^tA = -A\}$ "antisimmetriche".

$A \rightsquigarrow {}^{t}A =$ 

diagonale principale

trasp = simm. risp. a diag. principale.

Simmetrica 3x3 :
$$\begin{pmatrix} 1 & \pi & 5 \\ \pi & 91 & \sqrt{3} \\ 5 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Antisimmetrica 3x3 :
$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 7 \\ -\sqrt{3} & 0 & -4/8 \\ -7 & 4/8 & 0 \end{pmatrix}$$

Fatti : S_n , A_n sono sottosp. vett. di $M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$A,B \in S_n,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R} \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha A+\beta B \overset{?}{\in} S_n$$

So : $A = {}^{t}A$ cioè $(A)_{ij} = ({}^{t}A)_{ij}\ \forall i,j$ $\qquad (\alpha A+\beta B)_{ij} \overset{?}{=} (\alpha A+\beta B)_{ji}\ \forall \dots$

$(A)_{ij} = (A)_{ji}\ \forall i,j$

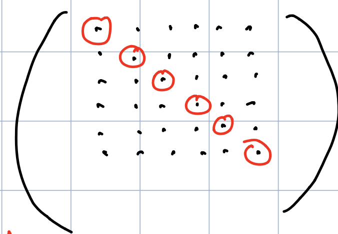
$(B)_{ij} = (B)_{ji}\ \forall i,j$

$$(\alpha A+\beta B)_{ij} = \alpha\cdot(A)_{ij}+\beta(B)_{ij} \qquad (\alpha A+\beta B)_{ji} = \alpha(A)_{ji}+\beta\cdot(B)_{ji}$$

OK

• $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ chiamo <u>traccia</u> di A

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} (A)_{ii}$$



somma dei coeff. su diag. princ.

$$W = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \ : \ tr(A) = 0\}$$

$$\underbrace{a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn} = 0}$$

equaz. lineare nei coeff. di A che giocano il ruolo delle componenti di $x \in \mathbb{R}^n$

<u>Oss</u>: le equazioni

$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j$ [simmetria]

$a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i,j$ [antisimmetria]

sono anch'esse lineari

$a_{ij} - a_{ji} = 0$

$a_{ij} + a_{ji} = 0$

e infatti abbiamo visto che S_n e A_n sono sottosp.

<u>MORALE</u>: per definire un sottosp. vettoriale si usano equazioni <u>lineari</u> (pol. omog. di I grado) aventi come componenti:

- per $x \in \mathbb{R}^n$ le componenti
- per $f \in \mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ i valori assunti

· per $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ i coeff

· per $A \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ i contenuti dei posti.

[oppure equazioni di questo tipo mescolate.]

$\boxed{3.2.2}$ $\quad U = M_{m\times m} \qquad W = \dots$ equaz...

(a) $\quad (A)_{1,1} \cdot (A)_{m,m} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

equaz. pol. omog. di grado 2 [NO]

Es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & 00 \\ 0 & & & 01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$

$\ \in W \qquad\qquad\qquad \in W \qquad\qquad\qquad \cancel{\in} W$

(c) $\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sqrt{i} - \sqrt{j}}{\sqrt{i} + \sqrt{j}} \cdot (A)_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$0 \cdot a_{11} + \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \cdot a_{12} + \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \cdot a_{13} + \dots$$
$$+ \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{22} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot a_{23} + \dots$$
$$+ \dots \qquad\qquad = 0$$

equaz. lineare nelle entrate di A

$\Rightarrow$ sì

$$\sum_{j=1}^{m} F(j) = F(1) + \dots + F(m)$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} F(i,j)\right)}_{G(i)} = F(1,1)+F(1,2)+F(1,3)+ \\ +F(2,1)+F(2,2)+\dots \\ +\dots$$

(d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\min(m,n)} (A)_{j,j}^{2} = 0$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

equaz. pol. di deg $= 2$

[No]

Invece equivale a

$(A)_{11} = 0$

$(A)_{22} = 0$

$(A)_{33} = 0 \quad \dots$

tutte lineari $\Rightarrow$ è sottosp.

$\boxed{3.2.3}$ $\quad V = \mathbb{R}[t] \qquad W = \{p(t) : \underline{\text{equaz}} \dots\}$

(b) $\quad p(2) - 2p'(-1) + 3p''(1) = 0$

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + \dots$$

$$p'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 + \dots$$

$$p''(t) = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 + \dots$$

$p(2) - 2p'(-1) + 3p''(1) = 0$:

$a_0 + (2-2)a_1 + (4+4+6)a_2 +$
$+ (8-6+18)a_3 + (\ \dots\ )a_4 + (\dots)a_5 + \dots = 0$

equaz. lin. nei coeff di $p(t) \Rightarrow$ sottosp

(e) $|p(t)| \leq 1 + e^t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$p(t) = 1 \in W$ $\qquad$ $2 \cdot p(t) = 2 \notin W$

$t = -1$: $2 \leq 1 + \frac{1}{e}$ falsa

(f) $\deg(2p'(t) - 3t^2 p'''(t)) \leq 5$

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$p'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

$$p''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n \cdot t^{n-2}$$

$$p'''(t) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n t^{n-3}$$

$$2p'(t) - 3t^2 p'''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n t^{n-1} + \sum_{n=3}^{\infty} -3n(n-1)(n-2) a_n t^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(2n - 3n(n-1)(n-2)) a_n}_{\text{questo coeff deve essere nullo per } n-1 > 5} \cdot t^{n-1}$$

cioè per $n \geq 7$

equivale a $a_n = 0$ per $n \geq 7$

$\Rightarrow$ è sottosp. e anzi è $\mathbb{R}_{\leq 6}[t]$.

$\boxed{3.2.4}$ $V = \mathcal{F}(\{a, b, c\}, \mathbb{R})$

(a) $f(c) \geq 2 f(a)$

è una disequazione [No]

$$f: \begin{cases} a \longmapsto 1 \\ b \longmapsto \sqrt{3} \\ c \longmapsto 7 \end{cases}$$

$f \in W \quad : \quad 7 \geq 2 \cdot 1$

$-f \notin W \quad : \quad -7 \geq 2 \cdot (-1)$

Falso

(b) $3 f(a) - 7 f(b) = 0$ sì

(c) $|f(b) + f(c)| \leq |f(a)|$

- $0 \in W$
- $f \in W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot f \overset{?}{\in} W$ sì
- $f, g \in W \overset{?}{\Longrightarrow} f + g \in W$

So: $|f(b) + f(c)| \leq |f(a)|$
$|g(b) + g(c)| \leq |g(a)|$

$|(f+g)(b) + (f+g)(c)| \leq |(f+g)(a)|$

Noto $|f(b) + g(b) + f(c) + g(c)|$
$\leq |f(b) + f(c)| + |g(b) + g(c)|$

$\leq |f(a)| + |g(a)|$

perché non è vero $|f(a)|+|g(a)| \leq |f(a)+g(a)|$

Esempio:

$$f : \begin{cases} a \mapsto 1 \\ b \mapsto 1 \\ c \mapsto 0 \end{cases} \qquad g : \begin{cases} a \mapsto -1 \\ b \mapsto 1 \\ c \mapsto 0 \end{cases}$$

$$f+g : \begin{cases} a \mapsto 0 \\ b \mapsto 2 \\ c \mapsto 0 \end{cases} \qquad f,g \in W \quad f+g \notin W$$

No

Visto: dato $S \subset V$ esiste unico $\mathrm{Span}(S)$: il più piccolo sottosp. vett. di V che contiene S

Visto: $\mathrm{Span}(v_1,\dots,v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}\}$

Es: dire se $v \in \mathrm{Span}(w_1,\dots,w_n)$; se sì dire se l'espressione è unica.

$\boxed{4.1.1}$ (a) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Mi sto chiedendo se esiste λ t.c. $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ cioè:

$$\begin{cases} -2\lambda = 3 \\ 5\lambda = -4 \end{cases}$$

No

(C) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ $w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

Mi sto chiedendo se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$ cioè

$$\begin{cases} 4\alpha + 3\beta = 3 \\ -11\alpha + 8\beta = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = 1 - \frac{4}{3}\alpha \\ -11\alpha + 8 - \frac{32}{3}\alpha = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{3}{55} \\ \beta = \frac{51}{55} \end{cases}$$

<u>sì</u>/<u>sì</u>