

RICEVIMENTO LUNEDÌ ore 17
DIP. DI MATEMATICA STUDIO 401
INVIARE UN EMAIL A
GIOVANNI.GAIFFI@UNIFI.IT

ES. 2.3.4

Dimostrare per assurdo che se $p \in \mathbb{N}$ primo
maggiore di 2 l'equazione $x^2 = p$ non ha
soluzioni in $\mathbb{Q}$.

Dim Supponiamo per assurdo che esista
un numero razionale $\frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$
 $n \in \mathbb{Z}$
 $n \neq 0$
e $\text{MCD}(m, n) = 1$

che risolve l'equazione.

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = p$$

che eguale

$$m^2 = p n^2$$

Questo è assurdo perché la fattorizzazione in primi è unica e l'esponente del primo p a sinistra è pari e a destra è dispari



Esercizio 2.3.11

Usando l'induzione completa, dimostrare che ogni numero naturale ≥ 1 è prodotto di primi.

Dim PROPOSIZIONE $P(n) = \text{"il numero } n \text{ è prodotto di primi"}$
PASO BASE $n=2$ $P(2)$ VERA

PASO INDUTTIVO.

Suppongo vera le proposizioni $P(k)$
 $\forall 2 \leq k \leq n$.

e ora di dimostrare la $P(n+1)$.

Considera $n+1$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{se } \bar{x} \text{ è primo } \quad \text{☺} \\ \text{se non è primo} \end{array} \right.$

esistono a e b interi
 con $1 < a < n+1$
 $1 < b < n+1$ f.c.

$$n+1 = ab$$

Ora $P(a)$ e $P(b)$ sono vere
 per ipotesi induttiva.

$$\begin{array}{l} \text{Dunque } a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \\ b = q_1^{\beta_1} \dots q_s^{\beta_s} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \\ b = q_1^{\beta_1} \dots q_s^{\beta_s} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{fattorizzazione} \\ \text{in} \\ \text{primi} \end{array}$$

$$n+1 = ab = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} \dots q_s^{\beta_s}$$

ovvia $n+1$ ammette una fattorizzazione

un prodotto di primi



ES 2.3.12

Dimostrare che esistono
infiniti numeri primi.

Dim

Supponiamo per assurdo che siano
finiti e che siano i seguenti:

$p_1, p_2, \dots, p_N$

Considero

$$h = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_N + 1$$

Per l'es. precedente, h si fattorizza come
prodotto di primi. Sia q uno di questi

primi. Dunque q è uno fra i
numeri

$$p_1, p_2, \dots, p_N.$$

Ma se penso alla divisione euclidea
di h per q trovo un assurdo:

— dato che q divide h il resto è 0

— dato che $q = p_j$

$$h = p_j (\quad) + 1$$

e il resto è 1

ASSURDO

ESERCIZIO 2.3.16

$$f: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}^2 = \mathbb{N}, \mathbb{N}$$
$$m \rightarrow (m^2, 3m-2)$$

è INIETTIVA?

è SURGETTIVA?

Porto $\Delta = \{ (m, m) \in \mathbb{N}^2 : m \in \mathbb{N} \}$

trovare $f^{-1}(\Delta)$.

Dimi

$$1 \rightarrow (1, 1)$$

$$2 \rightarrow (4, 4)$$

$$3 \rightarrow (9, 7)$$

$$4 \rightarrow (16, 10)$$

Large un dubbio: le coppie del tipo
 $(5, n)$

come possono appartenere a $\text{Im } f$?

Large anche un altro dubbio

$(m, 2)$

possono appartenere a $\text{Im } f$?

Dimostrano che $(0, 2) \notin \text{Im } f$

Infatti: se per un certo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
valesse

$f(n) = (0, 2)$ allora

$$(n^2, 3n-2) = (0, 2)$$

ASSURDO ASSURDO

$$3m - 2 = 2$$

$$3m = 4$$

3 divide 4 ASSURDO

concludiamo f non è SURGETTIVA

Per quel che riguarda l'iettività, la risposta è che è INIETTIVA

Infatti se $f(n_1) = f(n_2)$ mostra che $n_1 = n_2$

$$f(n_1) = f(n_2) \text{ vuol dire}$$

$$(n_1^2, 3n_1 - 2) = (n_2^2, 3n_2 - 2)$$

In particolare

$$3m_1 - 2 = 3m_2 - 2$$

da cui

$$3m_1 = 3m_2$$

da cui

$$m_1 = m_2$$

Trovare $f^{-1}(\Delta)$.

Ciò $m \in f(m) \in \Delta$

$$f(m) = (n, m) \text{ per un certo } n$$

$$(m^2, 3m-2) = (n, m)$$

mi piace
e $m^2 = 3m-2$

Quindi cerco m t.c. $m^2 = 3m - 2$
 ossia le soluzioni in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ dell'
 equazione

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$\text{Quindi } f^{-1}(\Delta) = \{1, 2\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

ES 3.2.1 Sia $V = \mathbb{R}^n$

$$(b) \quad W = \left\{ x : \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\cos(\pi \cdot j)}{\ln(1+j^2)}} \cdot x_j = 0 \right\}$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{\cos \bar{\Pi} \cdot 1}{\ln(1+1^2)} x_1 + \frac{\cos \bar{\Pi} \cdot 2}{\ln(1+2^2)} x_2 + \dots + \frac{\cos \bar{\Pi} \cdot n}{\ln(1+n^2)} x_n = 0$$

è della forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$$

con $a_j \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{W}$ è uno ^{spazio} η . vettoriale infatti:

$$1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{W} \text{ infatti}$$

$$a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

2) siano $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in W$

devo verificare che la loro somma $\in W$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$a_1 \cdot (x_1 + y_1) + a_2 (x_2 + y_2) + \dots + a_n (x_n + y_n) \stackrel{?}{=} 0$$

rispondo

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n) + (a_1 y_1 + \dots + a_n y_n) = 0$$

$$= 0 \text{ perché } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in W$$

$$= 0 \text{ perché } \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in W$$

3) sia $\lambda \in \mathbb{R}$, sia $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in W$

almeno dimostrare che

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in W.$$

Infatti $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_m \end{pmatrix}$

$$a_1 \lambda x_1 + a_2 \lambda x_2 + \dots + a_n \lambda x_n \stackrel{?}{=} 0$$

$$\lambda (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n) = 0$$

$$\uparrow \\ = 0 \text{ perché } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in W$$

$$c) \quad W = \left\{ x : x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \dots + x_n^n = 0 \right\}$$

$$\text{Se } n=1$$

$$W = \left\{ x_1 = 0 \right\}$$

$$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R} \quad (7) \quad (x_1)$$

In questo caso particolare



W è r. proprio.

Se $n > 1$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

W non è r. proprio.

Infatti:

$$x = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

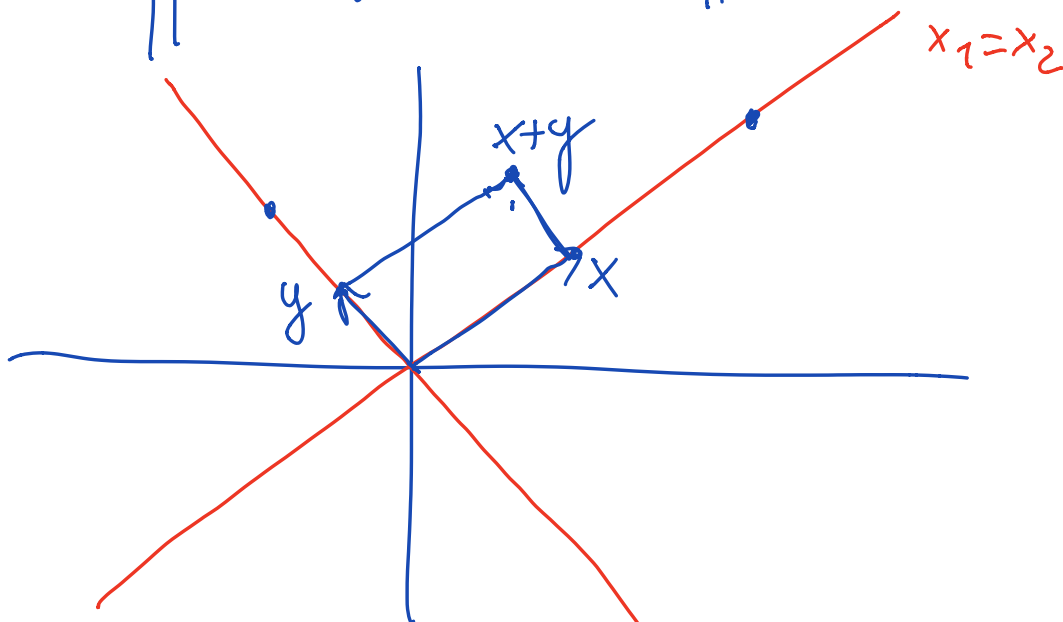
$$y = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entrambi $\in W$

$$x+y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$$

d) $W = \{x : x_1^2 = x_2^2\}$
è ordinata

Spazio $n=2$ $\mathbb{R}^2$



$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 = x_2^2 \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \mid x_1^2 - x_2^2 = 0 \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \mid \underbrace{(x_1 - x_2)}_{\text{red}} \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\text{blue}} = 0 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x_1, x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

W non è s. spazio vettoriale perché
non rispetta la proprietà della
somma