Algebra Lineare 9/10/19

V sp. vett. ; $W \subset V$ è sottosp. vett. se
(1) $0 \in W$
(2) dati $w_1, w_2 \in W$ si ha che $w_1 + w_2 \in W$
(3) dati $\lambda \in \mathbb{R}$ e $w \in W$ si ha che $\lambda \cdot w \in W$.

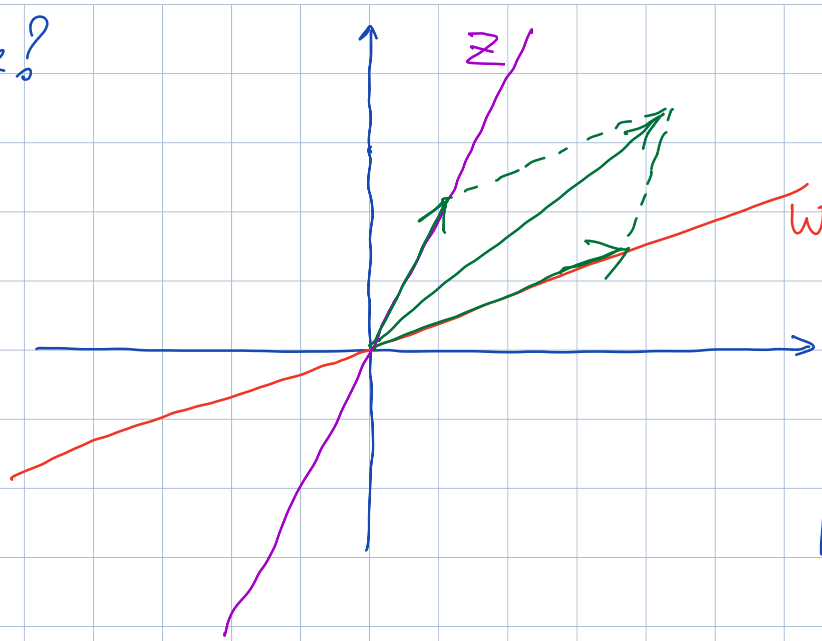
Prop: W è sottosp. se e solo se
(1) $0 \in W$
(2+3) dati $w_1, w_2 \in W$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ si ha che $\lambda_1 \cdot w_1 + \lambda_2 \cdot w_2 \in W$.

Dim: (2) e (3) $\Rightarrow$ (2+3) ovvio.
(2+3) $\Rightarrow$ (2) e (3)
(2) dati $w_1, w_2 \in W$ devo vedere che $w_1 + w_2 \in W$: infatti
$w_1 + w_2 = 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2$ è in W grazie a (2+3)
(3) dati $\lambda \in \mathbb{R}$ e $w \in W$ devo vedere che $\lambda w \in W$: infatti
$\lambda \cdot w = \lambda \cdot w + 0 \cdot w$ è in W grazie a (2+3).
$\boxtimes$

Oss: si può anche sostituire (1) con
(1') $W \neq \emptyset$
Infatti se vale (1') esiste $w \in W$ e grazie alla (3) ho
$0 \cdot w = 0 \in W$, quindi vale (1). [inutile]

Oss: $W, Z \subset V$ sono sottospazi, $W \cap Z$ è sottospazio.

Unione?



[No.]

Prop: $W \cup Z$ è sottospazio $\Longleftrightarrow$ $W \subset Z$ oppure $Z \subset W$

Dimo: $\Leftarrow$ ovvio.

$\Rightarrow$ per assurdo suppongo che $W \cup Z$ sia sottospazio ma $W \not\subset Z$ e $Z \not\subset W$. Cioè

Notazione: $A \subset B$ significa "contenuto o uguale". Invece $A \subsetneq B$ "strettamente contenuto"

$\exists w \in W$ t.c. $w \notin Z$, $\exists z \in Z$ t.c. $z \notin W$;

poiché $w, z \in W \cup Z$; sto supponendo che $W \cup Z$ sia sottosp

dunque $w + z \in W \cup Z$; due casi:

- $w + z = w' \in W \Rightarrow z = w' - w \in W$ Assurdo
- $w + z = z' \in Z \Rightarrow w = z' - z \in Z$ Assurdo

∎

Resta fissato V spazio vettoriale.

Prop/Def: dato S sottoinsieme di V esiste un unico W con queste proprietà:

- è il più piccolo sottospazio di V che contiene S
- ovvero, equivalentemente:
  - (1) W è sottospazio di V
  - (2) $W \supset S$
  - (3) se Z è un altro sottospazio di V e $Z \supset S$ si ha che $Z \supset W$.

Tale W è detto sottospazio generato da S e indicato $\mathrm{Span}(S)$.

Oss: tra poco darò una "costruzione" di $\mathrm{Span}(S)$.

Dim: provo che W esiste: considero l'insieme di tutti i sottospazi di V che contengono S e chiamo W la loro intersezione*; dico che va bene:

(1) è sottosp. perché è intersezione di sottospazi

(2) contiene S perché è intersezione di insiemi che contengono S

(3) se Z è un sottosp. che contiene S, dunque Z è uno dei sottosp. intersecati per ottenere W, dunque $Z \supset W$.

* ha senso poiché tra tali sottospazi c'è almeno V.

Unicità: suppongo di avere W_1, W_2 che soddisfano; devo vedere che sono uguali. So:

$(1)_1$ W_1 sottosp $\qquad$ $(1)_2$ W_2 sottosp

$(2)_1$ $W_1 \supset S$ $\qquad$ $(2)_2$ $W_2 \supset S'$

$(3)_1$ se Z è sottosp., $Z \supset S'$ allora $Z \supset W_1$ $\qquad$ $(3)_2$ Z sottosp, $Z \supset S \Rightarrow Z \supset W_2$

$W_1 \supset W_2$

$W_2 \supset W_1$

$\Longrightarrow W_1 = W_2$. $\boxtimes$

Visto sopra per la def. di sottosp. $\lambda_1 \cdot w_1 + \lambda_2 \cdot w_2$; estendiamo:

Def: chiamo combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_m \in V$ con coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ l'espressione

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_m \cdot v_m$$

oppure il suo risultato.

$$\boxed{3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + (-5) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -38 \end{pmatrix}}$$

$3 + 5 = 8$.

Prop: Supponiamo $S \neq \emptyset$; $\mathrm{Span}(S)$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari di elementi di S; cioè posto:

$$W = \{ \lambda_1 \cdot s_1 + \dots + \lambda_m \cdot s_m : m \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}, s_1, \dots, s_m \in S \}$$

si ha che $W = \mathrm{Span}(S)$.

Cor: $\mathrm{Span}(\{v_1,\dots,v_k\}) = \{\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k : \lambda_1,\dots,\lambda_k \in \mathbb{R}\}$

Dimo: devo vedere che W soddisfa le 3 proprietà:

(1) è sottosp (2) contiene S (3) $Z \supseteq S$ sottosp $\Rightarrow Z \supseteq W$.

(1) devo vedere che

(1) $W \ni 0$: se prendo $s \in S$ ho $W \ni 0 \cdot s = 0$

(2+3) se $w, w' \in W$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ devo vedere che

$\lambda w + \lambda' w' \in W$; infatti ho:

$w = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_m s_m$

$w' = \lambda_1' s_1' + \dots + \lambda_{m'}' s_{m'}'$

$\lambda w + \lambda' w' = (\lambda\lambda_1) \cdot s_1 + \dots + (\lambda\lambda_m) \cdot s_m + (\lambda'\lambda_1') s_1' + \dots + (\lambda'\lambda_{m'}') \cdot s_{m'}'$

OK

(2) dato $s \in S$ ho $W \ni 1 \cdot s = s$ OK

(3) se Z è sottosp. e $Z \supseteq S$ prendo $w \in W$ qualsiasi; devo vedere che $w \in Z$; infatti:

$$w = \underbrace{\lambda_1 \cdot \underset{\substack{\in \\ S \\ \subset \\ Z}}{s_1} + \dots + \lambda_m \cdot \underset{\substack{\in \\ S \\ \subset \\ Z}}{s_m}}_{\in Z}$$

$\blacksquare$

<u>Dimo corollario</u>: una combinazione lineare di elementi di $\{v_1, \dots, v_n\}$ si scrive come $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

- raccogliendo i coeff. se un v_j compare più volte
- aggiungendo $0 \cdot v_j$ se v_j non compare.

Es: $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$$\underline{7v_1} - \underline{9v_3} + \underline{4v_1} - \underline{5v_4} - \underline{2v_3} + \underline{6v_4}$$
$$= 11 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 - 11 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4 .$$