Algebra Lineare 8/10/19

$\boxed{1.4.1}$ Posto $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

provare direttamente che $x_n \in \mathbb{Q}$.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$$

$$x_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{(\sqrt{5})^k - (-\sqrt{5})^k}{\sqrt{5}}}$$

$k = 2h$ → 0

$k = 2h+1$ → $\frac{5^h \cdot \sqrt{5} + 5^h \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2 \cdot 5^h$

$\boxed{2.1.2}$ Usando solo le proprietà del · provare che $\forall x \neq 0$ l'equazione $y \cdot x = 1$ ha soluz. unica

(6) : la soluz. esiste.

(5) $x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$

(7) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

(8) $x \cdot y = y \cdot x$

Suppongo di avere due soluzioni y_1, y_2 e mostro che $y_1 = y_2$.

So: $\underline{y_1 \cdot x} = y_2 \cdot x = 1$. Allora:

$$y_1 \underset{(5)}{=} y_1 \cdot 1 = y_1 \cdot (y_2 \cdot x) \underset{(7)}{=} (y_1 \cdot y_2) \cdot x \underset{(8)}{=} (y_2 \cdot y_1) x \underset{(7)}{=} y_2 \cdot (y_1 \cdot x)$$

$$= y_2 \cdot 1 \underset{(5)}{=} y_2 .$$

$\boxed{2.1.3}$ $F_2 = \{0,1\}$ con $\oplus$, $\odot$ (scrivo invece $+, \cdot$)

$0+0 = 1+1 = 0$ $0+1 = 1+0 = 1$

$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ $1 \cdot 1 = 1$.

Provare che è un campo.

Devo verificare proprietà (1) - (9).

(3) $x+(y+z) = (x+y)+z$

x	y	z	$x+y$	$(x+y)+z$	$y+z$	$x+(y+z)$	
0	0	0	0	0	0	0	✓
0	0	1	0	1	1	1	✓
0	1	0	..	..			
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1	1	0	1	0	✓
1	1	0					
1	1	1	...	...	..	..	

(9) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

x	y	z	$y+z$	$x\cdot(y+z)$	$x\cdot y$	$x\cdot z$	$x\cdot y + x\cdot z$
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1	0	0	1	1	0

Perché queste operazioni?

$0+0 = 1+1 = 0 \qquad 0+1 = 1+0 = 1$

$0\cdot 0 = 0\cdot 1 = 1\cdot 0 = 0 \qquad 1\cdot 1 = 1.$

0 = "pari"

1 = "dispari"

$\boxed{2.3.2}$ Provare che $1\underbrace{0\ldots0}_{3k-1}1$ è composto (non primo).

$k=1 \qquad 1001 = 1000+1$

$k=2 \qquad 1000001 = 1000000+1$

$$1\underbrace{0\ldots0}_{3k-1}1 = 10^{3k}+1 = (10^k)^3+1^3 =$$

$$= \underbrace{(10^k+1)}_{>1}\cdot\underbrace{(10^{2k}-10^k+1)}_{>1}. \qquad \text{composto.}$$

$\boxed{2.3.4}$ $\forall p \in \mathbb{N}$ primo l'equaz. $x^2 = p$ non ha soluz. in $\mathbb{Q}$.

Per assurdo supponiamo che esista soluzione $x = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimi:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = p \implies a^2 = p \cdot b^2.$$

So che ogni intero si scrive in modo unico come prodotto di potenze di primi distinti. Poiché $a^2 = p \cdot b^2$, a^2 è multiplo di $p \implies$ la scomposiz. di a^2 contiene p; ma i primi che compaiono nella scomposizione di a e di a^2 sono gli stessi (con esponenti doppi per a^2)
$\implies$ anche a ha il fattore p. Dunque $a = p \cdot c$
$\implies p^2 \cdot c^2 = p \cdot b^2 \implies b^2 = p \cdot c^2$; stesso ragionamento dice che b è multiplo di p. Assurdo.

ipotesi

$\boxed{2.3.5}$ Provare per assurdo che se $n, m \in \mathbb{Z}$, $n^2 + m^2$ è pari allora $n + m$ è pari.

tesi

Supponiamo p.a. $n + m = 2h + 1$ $h \in \mathbb{Z}$. Allora $m = n - 2h - 1$

$$\implies n^2 + m^2 = n^2 + (n - 2h - 1)^2 =$$
$$= n^2 + n^2 + 4h^2 + 1 - 4nh - 2n + 4h$$
$$= 2(n^2 + 2h^2 - 2nh - n + 2h) + 1$$

cioè $n^2 + m^2$ è dispari: assurdo.

$\boxed{2.3.6}$ Dimostrare per induzione su n che un insieme con n elementi ha 2^n sottoinsiemi (compresi $\emptyset$ e lui).

$n=0$ $\quad X=\emptyset \qquad \mathcal{P}(X)=\{\emptyset\} \qquad 1=2^0$

$n=1$ $\quad X=\{a\}; \qquad \underbrace{\mathcal{P}(X)} = \{\emptyset, \{a\}\} \qquad 2=2^1$

l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X

$n=2$ $\quad X=\{a,b\}; \qquad \mathcal{P}(X)=\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\} \qquad 4=2^2$

$n=3$ $\quad X=\{a,b,c\}; \qquad \mathcal{P}(X)=\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} \qquad 8=2^3$

Dimostro per induzione. Passo base ok.
Suppongo (ipotesi induttiva) che ogni insieme X con $n\geq 0$ elementi abbia 2^n sottoinsiemi e prendo Y con $n+1$ elementi.
Devo vedere (tesi induttiva) che Y ha 2^{n+1} elementi.

Scelgo $y_0 \in Y$ e osservo che:

unione disgiunta ("tra insiemi disgiunti")

$$\mathcal{P}(Y) = \underset{\{\{y_0\}\cup B \,:\, B\in\mathcal{P}(Y\setminus\{y_0\})\}}{\underset{\parallel}{\{A\subset Y : A\ni y_0\}}} \sqcup \underset{\mathcal{P}(Y\setminus\{y_0\})}{\underset{\parallel}{\underbrace{\{A\subset Y : A\not\ni y_0\}}}}$$

sono 2^n (ipotesi induttiva) sono 2^n

$$\Rightarrow 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$ C.V.D.

$\boxed{23.8}$ Provare che $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ è intero $\forall n \in \mathbb{N}$

e che $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Devo vedere che $n(n+1)(2n+1)$ è sempre multiplo di 6, cioè multiplo di 2 e di 3.

(facile: $n(n+1)$)

Multiplo di 3: tre casi:

$$\begin{cases} n = 3k & n(n+1)(2n+1) = 3k(\ )(\ ) \\ n = 3k+1 & n(n+1)(2n+1) = (\ )(\ )(6k+3) \\ n = 3k+2 & n(n+1)(2n+1) = (\ )(3k+3)(\ ) \end{cases}$$

Dimostro che $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ per induzione.

PB: $n=0$: $0 = 0$ ✓

PI: Suppongo $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (ip. ind.)

e dimostro che

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$ (tesi ind.)

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n+1}{6}\left(2n^2+n+6n+6\right) = \frac{n+1}{6}\left(2n^2+7n+6\right)$$

$$(n+2)(2n+3) = 2n^2+3n+4n+6 = 2n^2+7n+6.$$

C.V.D.

V sp. vett. se ho $\quad V \times V \longrightarrow V$, $(v,w) \longmapsto v+w$ $\quad \mathbb{R} \times V \to V$, $(\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v$ con

(1)-(4) + gruppo commut (5),(6) "distributiva" (7) "assoc" (8) $1 \cdot v = v$

"Tutto quello che risulta ragionevole algebricamente è vero".

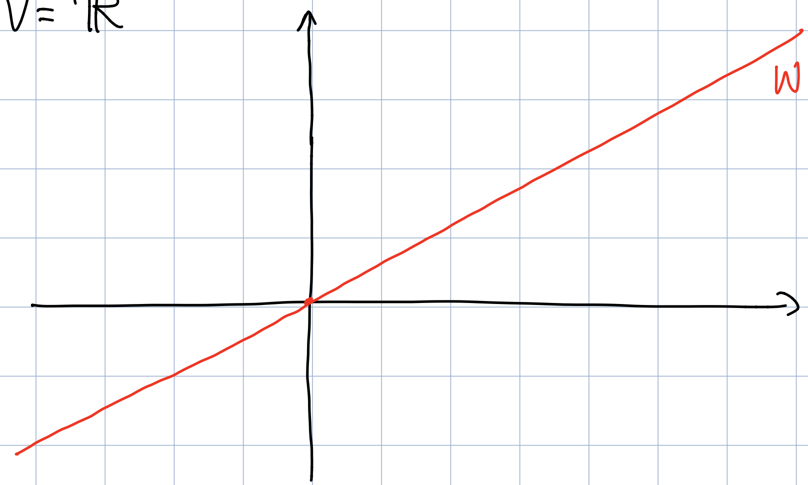
Sia V sp. vett. fissato fino a nuovo ordine.

Def: $W \subset V$ si dice sottospazio vettoriale se
(1) $0 \in W$
(2) se $w_1, w_2 \in W$ allora $w_1 + w_2 \in W$
(3) se $\lambda \in \mathbb{R}$, $w \in W$ allora $\lambda \cdot w \in W$.

Cioè W è chiuso in V rispetto alle operazioni $+, \cdot$ di V.

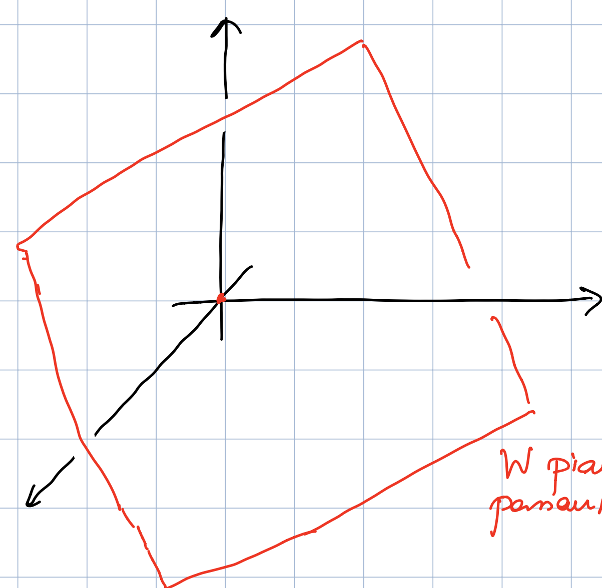
Oss: tale W è esso stesso uno spazio vettoriale con le operazioni ereditate a V.

Esempi: $V=\mathbb{R}^2$



W retta passante per O : è un sottospazio.

Esempio: $V=\mathbb{R}^3$



W piano passante per O : è un sottospazio.

Esempio: anche retta per O in $\mathbb{R}^3$ è sottospazio.

Oss: V ha sempre i sottospazi $\{0\}$, V (banali).

Esempi: $V = \mathbb{R}^n$;

1. $W = \{ x \in \mathbb{R}^n : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + n \cdot x_n = 0 \}$

- contiene 0? sì
- $x, y \in W$ cioè $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + n x_n = 0$
  $y_1 + 2y_2 + 3y_3 + \dots + n y_n = 0$

  è vero che $x + y \in W$?
  $(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3) + \dots + n(x_n + y_n) \overset{?}{=} 0$ sì
- $x \in W$ cioè $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + n x_n = 0$

  è vero che $\lambda \cdot x \in W$?
  $\lambda x_1 + 2 \cdot (\lambda x_2) + 3 \cdot (\lambda \cdot x_3) + \dots + n \cdot (\lambda x_n) \overset{?}{=} 0$ sì

2. $W = \{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} j \cdot x_j = 1 \}$

No: non contiene 0.

3. $W = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$

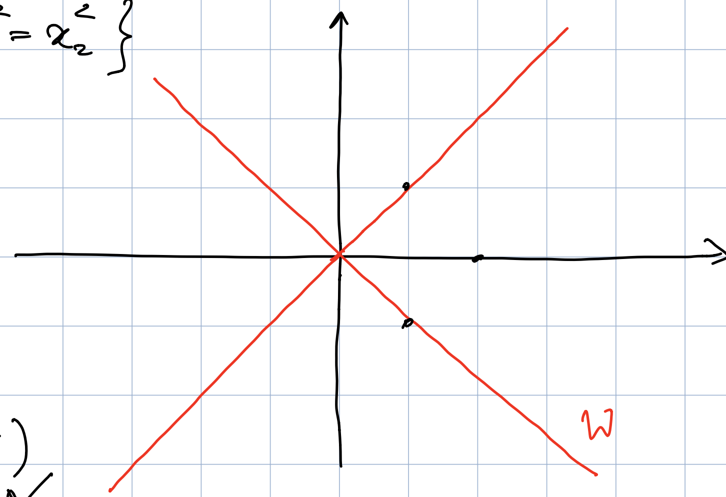
$0 \overset{?}{\in} W$ sì

$x, y \in W \overset{?}{\Rightarrow} x + y \in W$ sì

$\lambda \in \mathbb{R}, x \in W \overset{?}{\Rightarrow} \lambda \cdot x$ no: $\underset{\in \mathbb{R}}{\frac{1}{2}} \underset{\in W}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} = \underset{\notin W}{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$

no sottosp.

4. $W = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 = x_2^2\}$



$0 \overset{?}{\in} W$ sì

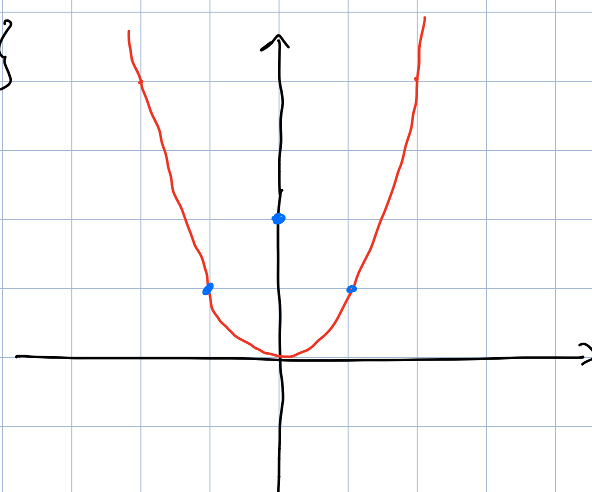
$x, y \in W \overset{?}{\Rightarrow} x+y \in W$

no: $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{\in W} + \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}_{\in W} = \underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}}_{\notin W}$

$\lambda \in \mathbb{R},\ w \in W \overset{?}{\Rightarrow} \lambda \cdot w \in W$ sì

no sottosp

5. $W = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1^2\}$



$0 \overset{?}{\in} W$ sì

$x, y \in W \overset{?}{\Rightarrow} x+y \in W$

no: $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

$x \in W,\ \lambda \in W \overset{?}{\Rightarrow} \lambda \cdot x \in W$

no: $2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

6. $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x_j = 0$$

equazione polinomiale di grado 1 omogenea in $x_1, \dots, x_n$

lineare

Definisca sempre un sottospazio:

- $0 \in W$: ok
- $x, y \in W$, cioè $\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x_j = 0$ $\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot y_j = 0$ allora

verifico che $x+y \in W$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot (x+y)_j = \sum_{j=1}^{n} a_j (x_j + y_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (a_j x_j + a_j y_j) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\right)$$

$$= 0 + 0 = 0 \qquad \text{ok}$$

- $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in W$ cioè $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 0$ verifico che $\lambda x \in W$:

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda x)_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda \cdot x_j = \lambda \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j = \lambda \cdot 0 = 0. \qquad \underline{\text{ok}}$$

<u>Oss</u>: se $W_1, W_2 \subset V$ sono sottospazi, allora $W_1 \cap W_2$ lo è.

<u>Dunque</u>: in $\mathbb{R}^n$ un sottoinsieme definito da un sistema di qualunque numero di equazioni lineari nelle componenti è un sottospazio vettoriale.

"Fatto: vanno bene <u>solo</u> le equazioni lineari"

oppure sono mascherate:

$$W = \{x \in \mathbb{R}^2 : \exp(7x_1 - 5x_2) = 1\}$$

non lineare

$$= \{ x \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{7x_1 - 5x_2 = 0}_{\text{lin} \Rightarrow \text{è sottosp}} \}$$