$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Big(\underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{1{,}61\ldots}\Big)^n - \underbrace{\Big(\underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{-0{,}61\ldots}\Big)^n}_{\text{trascurabile per } n>>0}\right)$$

<u>Oss</u>: • $\deg(p(t)+q(t)) \leq \max(\deg(p(t)), \deg(q(t)))$

vale $=$ se sono diversi

se sono uguali può valere $<$ stretto

• $\deg(p(t)\cdot q(t)) = \deg(p(t)) + \deg(q(t))$

<u>Oss</u>: vale anche se $p(t)=0$, $\deg(0)=-\infty$.

<u>Richiami di logica e dimostrazioni</u>.

proposizione : una frase che può essere vera o falsa

predicato : una proposizione che riguarda un soggetto variabile x in un insieme dato X

<u>Es</u>: $P(n) =$ "n è multiplo di 7" con $n \in \mathbb{N}$

implicazione: "$P(x) \Rightarrow Q(x)$"

è vera se $Q(x)$ è vera ogni volta che $P(x)$ è vera.

connettivi: e: "P e Q" vera se sono vere sia P sia Q

o: "P o Q" vera se è vera P oppure è vera Q

non: "$\text{non}(P)$" vera se P è falsa.

Oss: $\text{non}(P \text{ e } Q) = \text{non}(P) \text{ o } \text{non}(Q)$

$\text{non}(P \text{ o } Q) = \text{non}(P) \text{ e } \text{non}(Q)$.

Dimostrazioni.

- argomento diretto.

Prop: $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Es: $n = 10$ $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55$

$\frac{10 \cdot (10+1)}{2} = 55$ ✓

Dimo: chiamo $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$.

$$
\begin{aligned}
2 \cdot S_n = S_n + S_n = \;& 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) + n \\
+\;& n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1 + 0 \\
=\;& \underbrace{n + n + n + n + \quad + n + n}_{n+1}
\end{aligned}
$$

$$= n \cdot (n+1)$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad \boxtimes$$

<u>Induzione</u>: per dimostrare che è ~~vero~~ sempre vero un predicato $P(n)$ relativo a $n \in \mathbb{N}$ è sufficiente:

<u>Passo Base</u>: dimostrare che $P(0)$ è vero

<u>Passo Induttivo</u>: dimostrare che <u>per un generico n</u> se $\underbrace{P(n) \text{ è vera}}_{\text{ipotesi induttiva}}$ allora $\underbrace{\text{è vera } P(n+1)}_{\text{tesi induttiva}}$

ovvero: dimostrare l'implicazione "$P(n) \Rightarrow P(n+1)$".

Perché basta? Se so che $\underbrace{P(0) \text{ è vera}}_{PB}$ e $\underbrace{P(n) \Rightarrow P(n+1)}_{PI}$:

- $P(0)$ vera? sì, uso PB
- $P(1)$ vera? sì, uso PI con $n=0$ e riga precedente
- $P(2)$ vera? sì, uso PI con $n=1$ e riga precedente
- $P(3)$ vera? sì, uso PI con $n=2$ e riga precedente

...

<u>Prop</u>: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Dim</u>: per induzione su n; chiamo $P(n) = $ "$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$".

PB: $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k = \frac{0\cdot(0+1)}{2}$. **OK**

PI: suppongo $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

devo vedere che $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Lo faccio: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + (n+1)$

$\displaystyle = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. $\blacksquare$

Per assurdo v1: per verificare che una certa proposizione P è vera, suppongo che sia falsa e da ciò deduco la negazione di qualcosa che so essere vero.

Prop: l'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzione $x \in \mathbb{Q}$. $(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$

Dimo: suppongo per assurdo che esista una soluzione $x = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ $n, m \in \mathbb{Z}$. Posso supporre che $\frac{n}{m}$ sia ai minimi termini ovvero che n e m non hanno fattori primi comuni.

Abbiamo $\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2 \Rightarrow n^2 = 2m^2$; dunque n^2 è pari pertanto anche n lo è: $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Allora $(2k)^2 = 2m^2 \Rightarrow 4k^2 = 2m^2 \Rightarrow m^2 = 2k^2 \Rightarrow m^2$ pari $\Rightarrow m$ pari.

Assurdo

Per assurdo v2: per dimostrare una implicazione $P \Rightarrow Q$ dimostro che se Q è falsa allora P è falsa. (è la stessa cosa).

Prop.: dati $a, b \in \mathbb{N}$, se esiste c t.c. $a^2+b^2=c^2$ allora (almeno) uno tra a e b è pari.

Dim: suppongo per assurdo che sia a sia b siano dispari:
$a = 2k+1$, $b = 2h+1$ $k, h \in \mathbb{N}$.

Calcolo $a^2+b^2 = (2k+1)^2 + (2h+1)^2 = 4k^2+4k+1+4h^2+4h+1$
$= 4(k^2+k+h^2+h)+2$.

Se $c \in \mathbb{N}$ esistesse t.c. $a^2+b^2=c^2$ ho due casi:

* c pari $\Rightarrow c = 2n \Rightarrow c^2 = 4n^2 \Rightarrow c^2$ multiplo di 4 invece a^2+b^2 non lo è
* c dispari $\Rightarrow c = 2n+1 \Rightarrow c^2 = 4(n^2+n)+1 \Rightarrow$ la divisione $c^2 : 4$ ha resto 1 mentre la divisione $(a^2+b^2) : 4$ ha resto 2.

Assurdo in entrambi i casi. ▨

Terminologia: dimostrare per assurdo l'implicazione "$P \Rightarrow Q$" significa dimostrare l'implicazione "$\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$"

che è detta contronominale della "$P \Rightarrow Q$" ed è equivalente a essa.

errore di stampa nel libro (scambiati P e Q).

Una doppia implicazione "$P \Leftrightarrow Q$" se e solo se significa $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$ cioè P e Q sempre entrambe vere o entrambe false. A volte capita di dimostrare una direttamente e l'altra per assurdo.

<u>Divisione euclidea tra interi</u>: dati $n, m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ esistono unici q, r t.c.

$$n = m \cdot q + r \qquad 0 \leq r < m$$

dividendo divisore quoziente resto.

<u>Oss</u>: n è divisibile per m se e solo se la divisione $n : m$ ha resto 0.

<u>Prop</u>: dato $n \in \mathbb{Z}$ ho che n è divisibile per 6 $\Leftrightarrow$ è divisibile per 2 e per 3

<u>Dim</u>: $\underline{\Rightarrow}$ Se $n = 6k$ con $k \in \mathbb{Z}$ ho

$n = 2 \cdot (3k)$ $\quad 3k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ div. per 2

$n = 3 \cdot (2k)$ $\quad 2k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ div. per 3.

$\Leftarrow$ dimostro la contronominale, cioè che se n non è divisibile per 6 allora non è divisibile per 2 o per 3.

Se n non è divisibile per 6 allora la divisione $n:6$ ha resto $r \neq 0$, cioè $1 \leq r \leq 5$:

$n = 2\cdot(3k)+3$ va ancora bene che non è $n:2$

$r=1$ $\quad n = 6k+1 \Rightarrow n = 2\cdot(3k)+1$ non div. per 2; $n = 3\cdot(2k)+1$ non div. 3

$r=2$ $\quad n = 6k+2 \Rightarrow n = 3\cdot(2k)+2$ non div. per 3

$r=3$ $\quad n = 6k+3 \Rightarrow n = 2(3k+1)+1$ non div. per 2

$r=4$ $\quad n = 6k+4 \Rightarrow n = 3(2k+1)+1$ non per 3

$r=5$ $\quad n = 6k+5 \Rightarrow n = 2(3k+2)+1$ non div. per 2; $n = 3(2k+1)+2$ non div per 3.

$\blacksquare$

Def: chiamo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ un insieme V dotato di due operazioni

$$+ : V \times V \to V \qquad\qquad \cdot : \mathbb{R} \times V \to V$$
$$(v_1, v_2) \longmapsto v_1+v_2 \qquad\qquad (\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v$$

somma $\qquad\qquad$ prodotto per scalare

numero

con le seguenti proprietà:

1. $\exists\, 0 \in V$ t.c. $v+0 = v \quad \forall v \in V$
2. $\forall v \in V \;\exists\, (-v)$ t.c. $v+(-v) = 0$
3. $v_1+(v_2+v_3) = (v_1+v_2)+v_3 \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V$
4. $v_1+v_2 = v_2+v_1 \quad \forall v_1, v_2 \in V$

V con $+$ e el. neutro 0 è gruppo commutativo

5. $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall v_1, v_2 \in V$

6. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$

7. $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v$ " "

8. $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$

Gli el. di V sono detti vettori.

Esempi: dare un esempio significa:
→ dire chi è V
→ spiegare come si eseguono le operaz. $+$, $\cdot$
→ verificare le 8 proprietà.

Vettori colonna: $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$; $\mathbb{R}^n = \text{"}\underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}\text{"}$ però scritti in colonna.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$ con le operazioni seguenti

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

somma componente per componente

l'operazione che sto definendo

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

uno scalare va a moltiplicare tutte le compo

Verifica proprietà:

4. $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$v + w \overset{?}{\underset{\circ}{=}} w + v$$

$$v + w = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$w + v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ \vdots \\ b_n + a_n \end{pmatrix}$$

sì grazie alla commutativa del + in $\mathbb{R}$

5. $\lambda \in \mathbb{R}$, $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$\lambda \cdot (v + w) \overset{?}{\underset{\circ}{=}} \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$$

$$\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot (a_1 + b_1) \\ \vdots \\ \lambda \cdot (a_n + b_n) \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot v + \lambda \cdot w = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \cdot b_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 + \lambda \cdot b_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n + \lambda \cdot b_n \end{pmatrix}$$

sì per la distributiva in $\mathbb{R}$

1. $0=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$; $0+\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+a_1\\\vdots\\0+a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$.

<u>Matrici $n\times m$</u> $n,m\in\mathbb{N}$, $n,m>0$.

$$\underbrace{M_{n\times m}}_{n \text{ righe},\ m \text{ colonne}}(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1m}\\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm}\end{pmatrix} : a_{ij}\in\mathbb{R}\quad \begin{matrix}i=1\dots n\\ j=1\dots m\end{matrix}\right\}$$

n righe m colonne

coefficiente della matrice di posto (i,j)

indice di riga

indice di colonna

Per dare struttura di spazio vettoriale devo definire $+, \cdot$.

La somma si esegue posto per posto; uno scalare a moltiplicare va a moltiplicare ogni posto.

Es:
$$\underset{M_{3\times2}}{\begin{pmatrix}\sqrt2 & 7\\ -3 & 4\\ 11/3 & -9\end{pmatrix}} + \begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ 5 & -4 & 9\\ -\sqrt3 & 11 & \pi\end{pmatrix}$$

non ha senso

$$\underset{M_{3\times2}}{\begin{pmatrix}\sqrt2 & 7\\ -3 & 4\\ 11/3 & -9\end{pmatrix}}+\underset{M_{3\times2}}{\begin{pmatrix}0 & 2\\ 5 & 3/4\\ 1 & 3\end{pmatrix}}=\underset{M_{3\times2}}{\begin{pmatrix}\sqrt2 & 9\\ 2 & 19/4\\ 14/3 & -6\end{pmatrix}}$$

$$6 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 7/3 & 2 & -9 \\ \pi & 11/2 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{2\times 3}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 14 & 12 & -54 \\ 6\pi & 33 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{2\times 3}}$$

Verifica proprietà: come prima.

<u>Convenzione</u>: data $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$ pongo

$$(A)_{ij} = a_{ij}$$

cioè la notazione $(\cdot)_{ij}$ legge il coeff di posto (i,j), i-esima riga, j-esima colonna della matrice cui lo applico.

Se A è una matrice concreta ometto le tonde.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{23} & \pi & -7 \\ 4 & 11/3 & 2 \end{pmatrix}_{12} = \pi$$

Def. delle operazioni:

$A, B \in \mathcal{M}_{m\times m}$, $A+B \in \mathcal{M}_{m\times m}$

$$(A \underset{\text{nuova}}{+} B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} \quad \forall i,j$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\lambda \cdot A \in \mathcal{M}_{m\times n}$

$$(\underset{\text{nuovo}}{\lambda \cdot} A)_{ij} = \lambda \cdot (A)_{ij}$$

Verifica proprietà:

7. dati $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$

$$\underbrace{\lambda \cdot (\underbrace{\mu \cdot A}_{m\times n})}_{m\times n} \overset{?}{=} \underbrace{(\lambda \cdot \mu) \cdot A}_{m\times n}$$

Verificato che hanno numeri di righe e colonne ("taglie") uguali verifico che in ogni posto ci sia lo stesso coeff:

$$(\lambda \cdot (\mu \cdot A))_{ij} \overset{?}{=} ((\lambda \cdot \mu) \cdot A)_{ij}$$

$$(\lambda \cdot (\mu \cdot A))_{ij} = \lambda \cdot (\mu \cdot A)_{ij} = \lambda \cdot (\mu \cdot (A)_{ij})$$

$$((\lambda \cdot \mu) \cdot A)_{ij} = (\lambda \cdot \mu) \cdot (A)_{ij}$$

Sì per associativa del prodotto in $\mathbb{R}$

<u>Oss:</u> $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Polinomi: $\mathbb{R}[t]$ con somma solita e prodotto per scalare solito (l'operazione che serve è "numero · polinomio"; la "polinomio · polinomio" esiste ma non serve per definire spazio vettoriale.

Verifica proprietà:

8. Dato $p(t) \in \mathbb{R}[t]$, $1 \cdot p(t) \stackrel{?}{=} p(t)$.

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

$$1 \cdot p(t) = (1 \cdot a_0) + (1 \cdot a_1)t + \dots + (1 \cdot a_n)t^n$$
$$= a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n \qquad \text{Sì}$$

Funzioni da insieme X a $\mathbb{R}$

$\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ = l'insieme di tutte le $f : X \to \mathbb{R}$.

Devo definire somma e prodotto per scalare.

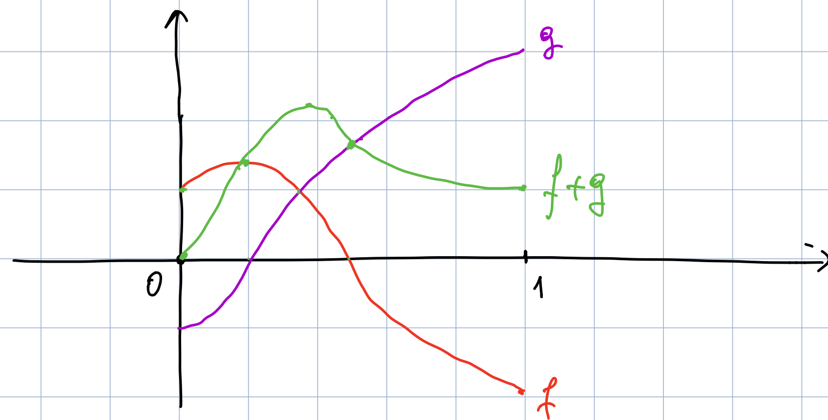
Date $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ definisco $f+g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ come la funzione $f+g : X \to \mathbb{R}$ t.c.

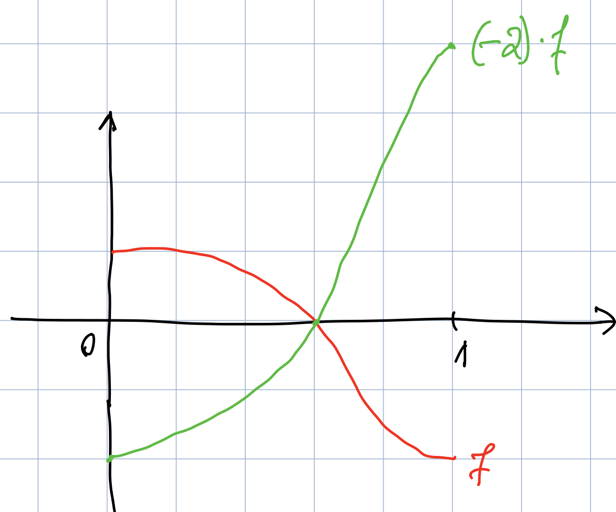
$$(f \underset{\text{nuovo}}{+} g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in X.$$

Dati $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ definisco $\lambda \cdot f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ come la funzione $\lambda \cdot f : X \to \mathbb{R}$ t.c.

$$(\lambda \underset{\text{nuovo}}{\cdot} f)(x) = \lambda \cdot f(x) \qquad \forall x \in X.$$

Es: $X = [0,1]$





Verifica proprietà:

3. Date $f, g, h \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$

$$f + \underbrace{(g+h)}_{\substack{\cap \\ \mathcal{F}(X,\mathbb{R})}} \overset{?}{=} (\underbrace{f+g}_{\substack{\cap \\ \mathcal{F}(X,\mathbb{R})}}) + h$$

$$\underbrace{}_{\mathcal{F}(X,\mathbb{R})} \qquad \underbrace{}_{\mathcal{F}(X,\mathbb{R})}$$

Sono funzioni con dominio e codominio uguali; resta da vedere che per ogni pto del dominio hanno stesso valore:

$$(f+(g+h))(x) \overset{?}{=} ((f+g)+h)(x)$$

$$f(x)+(g+h)(x) = f(x)+(g(x)+h(x))$$

$$(f+g)(x)+h(x) = (f(x)+g(x))+h(x)$$

Vero per associatività in $\mathbb{R}$

Conseguenze delle def. di sp. vett.

1 - 4 gruppo commut +
5 - 6 tipo distrib.
7 tipo assoc. per ·
8 $1 \cdot v = v$

Morale sarà: ha senso usare i vecchi simboli $+, \cdot$ per le nuove operazioni di sp. vett. perché qualsiasi proprietà vera per tali operaz. in $\mathbb{R}$ resta vera.

$$\boxed{v+w = u+w \implies v = u}$$

$$v+w = u+w \underset{(2)}{\implies} (v+w)+(-w) = (u+w)+(-w)$$

$$\underset{(3)}{\Longrightarrow} \quad v + (w + (-w)) = u + (u + (-w))$$

$$\underset{(2)}{\Longrightarrow} \quad v + 0 = u + 0 \quad \underset{(1)}{\Longrightarrow} \quad v = u$$

$$\boxed{\lambda \cdot 0 = 0}$$

$$\lambda \cdot \underset{(1)(c)}{0} \underset{(1)}{=} \lambda \cdot (0 + 0) \underset{(5)}{=} \lambda \cdot 0 + \cancel{\lambda \cdot 0}$$

$$0 + \cancel{\lambda \cdot 0}$$

appena dimostrato

$$\boxed{0 \cdot v = 0}$$ esercizio: analoga

$$\boxed{\text{se } \lambda \cdot v = 0 \text{ allora } \lambda = 0 \text{ oppure } v = 0}$$

Supponiamo che $\lambda \neq 0$ e verifico che allora $v = 0$:

$$\lambda \cdot v = 0 \Longrightarrow \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda^{-1} \cdot 0$$

$$\lambda^{-1} \cdot 0 = 0 \quad \text{visto sopra}$$

$$\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) \underset{(7)}{=} (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot v = 1 \cdot v \underset{(8)}{=} v$$

$$\boxed{(-1) \cdot v = -v}$$

$$0 \overset{(2)}{=} \cancel{v + (-v)}$$

$$\|$$

sopra ||

$$0 \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v \underset{(5)}{=} 1 \cdot v + (-1) \cdot v \underset{(8)}{=} \cancel{v} + (-1) \cdot v$$

$\Longrightarrow$ ok