



1. Se $f : \{z \in \mathbb{C}^3 : (1 - i)z_3 + 2iz_4 - 5z_7 = 0\} \rightarrow \mathbb{C}^3$ è lineare surgettiva e sono dati 9 generatori di $\text{Ker}(f)$, quanti bisogna scartarne per avere una base?

2. Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è lineare, sapendo che $f(5e_1 - 2e_2) = -3e_1 + e_2$ e che $f(3e_1 + 7e_2) = 5e_1 - 2e_2$, calcolare $f^{-1}(7e_1 - 3e_2)$.

3. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0\}$, data $f : X \rightarrow X$ con $f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 - x_3 \\ 7x_1 - 6x_2 - 7x_3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$ e

scelta $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

4. Esibire oppure dimostrare che non esiste un'applicazione lineare invertibile $f : \mathbb{C}_{\leq 1}[w] \rightarrow \{z \in \mathbb{C}^3 : (1 + i)z_1 + 2iz_2 - 3z_3 = 0\}$.

5. Se $A \in \mathcal{M}_{5 \times 8}(\mathbb{C})$ e $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ è una sottomatrice di A , stabilire quale frazione delle $M \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{C})$ sottomatrici di A sono orlate di B .

6. Risolvere $3iz^2 - (3 + 4i)z - 1 + 7i = 0$.

7. Posto $Z = \{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 + 5x_2 = 0\}$ e $W = \{x \in \mathbb{R}^2 : 4x_1 - 7x_2 = 0\}$, verificare che $\mathbb{R}^2 = Z \oplus W$ ed esibire la matrice della proiezione su Z associata a tale decomposizione.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.



1. In \mathbb{R}^5 considerare il sottospazio vettoriale X di equazioni $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$
- (A) (1 punto) Calcolare la dimensione di X .
- (B) (4 punti) Determinare tutti i vettori di X aventi nulle le due coordinate di posizione pari oppure due delle coordinate di posizione dispari, e le altre intere e prime tra loro e con somma positiva.
- (C) (3 punti) Ordinare i vettori del punto precedente in modo che sia crescente la somma delle coordinate ed estrarne una base \mathcal{B} di X .
- (D) (4 punti) Determinare le coordinate rispetto a \mathcal{B} del primo vettore scartato nel punto precedente.

2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 - 2t \\ (2 - t)x + 4y - 2z = 3 \\ x - 2ty - 8z = -11. \end{cases}$$

- (A) (3 punti) Risolvere il sistema per $t = 1$.
- (B) (4 punti) Trovare l'unico valore t_1 di t per il quale il sistema ha infinite soluzioni, ed esibirle.
- (C) (2 punti) Trovare l'unico valore t_2 di t per il quale il sistema è impossibile.
- (D) (3 punti) Detto U lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato a quello dato per $t = t_2$, e definito V il sottospazio di \mathbb{R}^3 di equazione $7x - 8y + 5z = 0$, provare che $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$ ed esibire la proiezione su V del vettore $\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ rispetto a tale decomposizione.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.



Risposte ai quesiti

5. ♥

1. 4

2. $11e_1 + 12e_2$ 3. $\begin{pmatrix} 11 & -12 \\ 11 & -15 \end{pmatrix}$ 4. Esiste; ad esempio la f tale che $f(1) = 3e_1 + (1+i)e_3$ e $f(w) = 3e_2 + 2ie_3$ 5. $\frac{1}{35}$ 6. $z_1 = \frac{1}{3} + i$, $z_2 = 1 - 2i$ 7. Z e W hanno dimensione 1 e si intersecano banalmente; $\frac{1}{41} \begin{pmatrix} 20 & -35 \\ -12 & 21 \end{pmatrix}$

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ♦



Soluzioni degli esercizi

5. ♥

1.

(A) 3

$$(B) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 17 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 31 \\ 1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 38 \\ 0 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(C) L'ordine è il precedente; bisogna scartare l'ultimo vettore

$$(D) \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix}$$

2.

$$(A) x = -\frac{13}{12}, y = \frac{35}{24}, z = \frac{7}{8}$$

$$(B) t_1 = -3; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ -6 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -10 \\ 19 \\ 13 \end{pmatrix} \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

$$(C) t_2 = 5$$

$$(D) U \text{ è generato da } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ che non appartiene a } V, \text{ il quale ha dimensione } 2; \begin{pmatrix} 17 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix}$$