UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

IN SUPREMÆ DIGNITATIS
1343

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 8/1/20 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Determinare $[4e_1 + 13e_2]_{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = (-5e_1 + 3e_2,\ 9e_1 - e_2)$.

2. Dati sottospazi vettoriali $Z, W \subset \mathbb{R}^8$ di dimensioni rispettive 4 e 5 tali che $\sqrt{3}e_5 + \pi e_7 \notin Z + W$, stabilire che dimensione possa avere $Z \cap W$.

3. Se $f : \mathbb{C}_{\leqslant 7}[t] \to \{z \in \mathbb{C}^4 :\ (1+i)z_2 - 4z_3 + 5iz_4 = 0\}$ è lineare e non surgettiva, stabilire che dimensione possa avere $\mathrm{Ker}(f)$.

4. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ stabilire quante soluzioni ha il sistema $\begin{cases} (t-2)x + (1-2t)y = 2t-4 \\ (3-t)x + (t+1)y = 1-t. \end{cases}$

5. Data $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -3 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{32}$.

6. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(e_1 + e_2 + e_3)$, calcolare la proiezione su X di $9e_1 + 5e_2 - 6e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. In $\mathbb{R}^4$ considerare il sottospazio vettoriale X di equazione $6x_1 - 8x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 0$.

(A) (3 punti) Esibire tutti i vettori di X aventi due coordinate nulle e le altre due intere e prime fra loro, di cui positiva quella con indice minore.

(B) (3 punti) Ordinare i vettori trovati nel punto precedente in modo che sia decrescente la somma dei valori assoluti delle coordinate, quindi estrarre dai vettori così ordinati una base $\mathcal{B}$ di X.

(C) (3 punti) Provare che l'espressione $f(x) = \begin{pmatrix} -x_2 - x_4 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 \\ -2x_3 - 2x_4 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$ definisce un'applicazione lineare $f : X \to X$.

(D) (3 punti) Determinare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

2. In $\mathbb{R}^3$ considerare al variare di $t \in \mathbb{R}$ il sottospazio affine

$$E_t : \begin{cases} 2tx + (t+5)y - 10z = t - 1 \\ (t-6)x - 4y + (2t-1)z = -1. \end{cases}$$

(A) (4 punti) Trovare $n, n_0 \in \mathbb{N}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ tali che $\dim(E_t) = n$ per $t \neq t_0$ e $\dim(E_{t_0}) = n_0$.

(B) (4 punti) Trovare equazioni parametriche di E_t per $t = -1$ e per $t = t_0$.

(C) (4 punti) Discutere al variare di $t \in \mathbb{R}$ la posizione di E_t rispetto al sottospazio affine

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -11 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Risposte ai quesiti

5. $\diamondsuit$

1. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$

2. Tra 2 e 4 compresi

3. Tra 6 e 8 compresi

4. Infinite per $t = 5$, nessuna per $t = 1$, una altrimenti

5. $-\frac{5}{9}$

6. -6

7. $6e_1 + 2e_2 - 9e_3$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni degli esercizî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(B) L'ordine è il precedente; la base è costituita dal primo, dal secondo e dal quarto vettore

(C) Posto $\omega = (6, -8, -9, 10)$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ si ha $\omega \cdot A = 2\omega$

(D) $\frac{1}{45}\begin{pmatrix} -127 & 8 & 59 \\ 55 & -80 & 40 \\ -81 & -81 & 27 \end{pmatrix}$

2.

(A) $n = 1,\ n_0 = 2,\ t_0 = 3$

(B) $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -13 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$

(C) Rette parallele per $t = -2$; piano e retta incidenti in un punto per $t = 3$; rette sghembe altrimenti