

Probabilità

Esercizi di matematica e statistica SPES 18/19

Esercizio 1

Stabilire quanti possibili esiti diversi esistono per l'evento indicato:

- (a) Lancio contemporaneo di 5 monete da 1 €;
- (b) Lancio contemporaneo di 3 monete da 1 € e di 4 da 2 €;
- (c) Estrazione di 4 bilie da un'urna che ne contiene 3 bianche e 798 rosse;
- (d) Anagrammi (anche privi di senso) della parola “viola”;
- (e) Anagrammi (anche privi di senso) della parola “violino”;
- (f) Mani iniziali per me in una partita a bridge (13 carte su 52);
- (g) Mani iniziali per me e il mio compagno in una partita a bridge (13 carte su 52 ciascuno);
- (h) Cinquine a tombola contenenti due numeri pari e tre dispari.

Esercizio 2

- (a) Calcolare il coefficiente di a^8b^3 in $(a + b)^{11}$;
- (b) Verificare che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ e spiegare questo fatto;
- (c) Verificare che $\sum_{k=0}^n 2^k \cdot \binom{n}{k} = 3^n$.

Esercizio 3 Calcolare la probabilità dell'evento indicato:

- (a) Uscita di un multiplo di 8 come primo estratto della tombola;
- (b) Uscita di due numeri con somma 7 come primi due estratti della tombola;
- (c) Uscita di somma 8 lanciando due dadi;
- (d) Avere tutti bastoni in mano alla prima mano di una partita a scopa (con 3 carte in mano su 40);
- (e) Avere 3 carte tutte di semi diversi alla prima mano di una partita a scopa (con 3 carte in mano su 40);
- (f) Vincere una quaterna a un'estrazione del lotto.

Esercizio 4 Se pago s per partecipare alla scommessa indicata, quanto deve darmi il banco in caso di vittoria perché la scommessa sia equa?

Scommetto che...

- (a) ... estraendo tre carte da un mazzo da 52 trovo almeno una figura;
- (b) ... estraendo tre carte da un mazzo da 52 trovo esattamente una figura;
- (c) ... tirando 1000 dadi la somma dei numeri usciti è pari;
- (d) ... alla prima mano di una partita a briscola avrò in mano due briscole;
- (e) ... tirando 3 dadi escono tutti e tre i punteggi maggiori di 2;
- (f) ... se fermo per strada le prime 32 persone che passano ce ne sono due che compiono gli anni lo stesso giorno. (Ignorare i bisestili e usare una calcolatrice programmabile o un computer.)

Esercizio 5 Determinare la probabilità dell'evento descritto:

- (a) Uscita di un multiplo di 3 o di 11 scegliendo un numero intero qualsiasi;
- (b) Uscita di un numero compreso tra 0 e 1 scegliendo un numero reale qualsiasi;
- (c) Uscita di un numero x tale che $x - [x] \in \left[\frac{2}{7}, \frac{3}{5}\right]$ scegliendo un numero reale x qualsiasi.

Esercizio 6 Calcolare le seguenti probabilità condizionate:

- (a) Che lanciando un dado esca un dispari, sapendo che non è uscito 1;
- (b) Che il primo estratto a tombola sia multiplo di 7, sapendo che ha due cifre e che la prima è dispari;
- (c) Che alla prima mano di una briscola io abbia tre figure, sapendo che ne ho almeno due;
- (d) Che alla prima mano di una briscola io abbia almeno due figure, sapendo che ne ho almeno una;
- (e) Che alla prima mano di una briscola io abbia due figure, sapendo che ne ho almeno una.

Esercizio 7 Da una malattia è affetto in media un abitante su 110 000. Un test diagnostico è affidabile al 98% sugli individui ammalati, e al 97% sugli individui sani. Che probabilità ha di essere ammalato un individuo che risulta positivo al test?

Esercizio 8 Nel contesto indicato, calcolare il valor medio atteso e la varianza della variabile X descritta:

- (a) Ho in tasca cinque monete, tre da 2 € e due da 1 €; ne estraggo una a caso; X è la somma estratta;
- (b) Ho in tasca cinque monete, tre da 2 € e due da 1 €; ne estraggo due a caso; X è la somma estratta;
- (c) Ho in tasca sette monete, tre da 2 € e quattro da 1 €; ne estraggo due a caso; X è la somma estratta;
- (d) Lancio due dadi; X è il punteggio più basso uscito;
- (e) Gioco una partita a briscola; X è il numero di figure che ho in prima mano.

Esercizio 9 Qual è la probabilità di avere 4 successi ripetendo 11 volte un esperimento che ogni volta ha probabilità di successo $\frac{3}{8}$?

Soluzione dell'esercizio 1

- (a) 6
- (b) 20
- (c) 4
- (d) 120
- (e) 1 260
- (f) $\binom{52}{13} \cong 6.35 \cdot 10^{11}$
- (g) $\binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13} \cong 5.15 \cdot 10^{21}$
- (h) $\binom{45}{2} \cdot \binom{45}{3} \cong 1.4 \cdot 10^7$

Soluzione dell'esercizio 2

- (a) $\binom{11}{8} = 56$
- (b) $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$. Scegliere $n - k$ oggetti equivale a scegliere i k complementari
- (c) $3^n = (2 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 2^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n 2^k \cdot \binom{n}{k}$

Soluzione dell'esercizio 3

- (a) $\frac{11}{90}$
- (b) $\frac{3}{\binom{90}{2}} = \frac{1}{1335}$
- (c) $\frac{5}{36}$
- (d) $\frac{\binom{10}{3}}{\binom{40}{3}} = \frac{3}{247}$
- (e) $\frac{30}{39} \cdot \frac{20}{38} = \frac{100}{247}$
- (f) $\frac{86}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{511\,038}$

Soluzione dell'esercizio 4 Deve pagare $\frac{s}{p}$ con...

(a) $p = 1 - \frac{40}{52} \cdot \frac{39}{51} \cdot \frac{38}{50} = \frac{47}{85}$

(b) $p = 3 \cdot \frac{12}{52} \cdot \frac{40}{51} \cdot \frac{39}{50} = \frac{36}{85}$

(c) $p = \frac{1}{2}$

(d) $p = 3 \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} \cdot \frac{30}{37} = \frac{1080}{9139}$

(e) $p = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

(f) Un gruppo di k persone ha i compleanni tutti in giorni diversi con probabilità $f(k) = \frac{364!}{365^{k-1} \cdot (364-k+1)!}$. Dunque $p = 1 - f(32) \cong 75.33\%$

Soluzione dell'esercizio 5

(a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{11} - \frac{1}{33} = \frac{13}{33}$

(b) 0

(c) $\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{11}{35}$

Soluzione dell'esercizio 6

(a) $\frac{2}{5}$

(b) $\frac{1}{10}$

Poniamo ora

$$\begin{aligned}z &= \frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{40 \cdot 39 \cdot 38} \\u &= 3 \cdot \frac{12 \cdot 28 \cdot 27}{40 \cdot 39 \cdot 38} \\d &= 3 \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 28}{40 \cdot 39 \cdot 38} \\t &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{40 \cdot 39 \cdot 38}\end{aligned}$$

(c) $\frac{t}{d+t} = \frac{5}{47}$

(d) $\frac{d+t}{u+d+t} = \frac{517}{1651}$

(e) $\frac{d}{u+d+t} = \frac{462}{1651}$

Soluzione dell'esercizio 7 0.0297%

Soluzione dell'esercizio 8

(a) $\mu = \frac{8}{5}, \sigma^2 = \frac{6}{25}$

(b) $\mu = \frac{16}{5}, \sigma^2 = \frac{9}{25}$

(c) $\mu = \frac{20}{7}, \sigma^2 = \frac{20}{49}$

(d) $\mu = \frac{91}{36}, \sigma^2 = \frac{2555}{1296}$

(e) $\mu = \frac{9}{10}, \sigma^2 = \frac{777}{1300}$

Soluzione dell'esercizio 9 $\binom{11}{4} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^4 \left(\frac{5}{8}\right)^7 \cong 24.31\%$