Insiemi e funzioni

Esercizi di matematica e statistica
SPES 18/19

Esercizio 1 Stabilire se quella descritta è una funzione con il dominio e il codominio assegnati:

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) =$ il numero di trattini con cui si scrive n sul display di una (vecchia) calcolatrice;

(b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = 3n - 7$;

(c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = 1 + \frac{n^3-1}{n-1}$;

(d) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) =$ un numero naturale maggiore di n;

(e) $f : \mathbb{N} \to$ l'alfabeto latino,
$f(n) =$ l'iniziale della parola con cui si scrive n in inglese;

(f) $f : \mathbb{N} \to$ l'alfabeto latino,
$f(n) =$ la quarta lettera della parola con cui si scrive n in inglese;

(g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, \quad f(n) = \frac{2n^5-1}{n^4+1}$;

(h) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = \frac{2x^5-1}{x^4+1}$;

(i) $X =$ la popolazione mondiale, $\quad f : X \to X, \quad f(x) =$ i nonni di x;

(j) $X =$ la popolazione mondiale, $\quad f : X \to X, \quad f(x) =$ il nonno paterno di x;

(k) $X =$ la popolazione mondiale,
$f : X \to X, \quad f(x) =$ il figlio ultimomogenito di x;

(l) $X =$ la popolazione italiana, $\quad f : X \to X, \quad f(x) =$ il nonno paterno di x.

Esercizio 2 Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ sono funzioni (con il dominio di g uguale al codominio di f) si chiama *composizione* di f e g la funzione $g \circ f : X \to Z$ data da $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ per ogni $x \in X$. Calcolare quanto richiesto:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x},\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2$;
calcolare $(g \circ f)(-27)$ e $(f \circ g)(-27)$;

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3x-1}{x+5},\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x - 2$;
calcolare $(g \circ f)(7)$ e $(f \circ g)(7)$;

(c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ f(n) = \frac{5n^2-1}{2n+3},\ g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z},\ g(x) = [x]$, dove $[x]$ indica la parte intera di x;
calcolare $(g \circ f)(4)$ e $(f \circ g)(4)$;

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = \begin{pmatrix} x^3 + 2 \\ 2x - 3 \end{pmatrix},\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - 2y \\ y^3 - 8x \end{pmatrix}$;
calcolare $(g \circ f)(x)$.

Esercizio 3 Una funzione $f : X \to Y$ si dice *invertibile* se esiste una funzione $g : Y \to X$ tale che $(g \circ f)(x) = x$ per ogni $x \in X$ e $(f \circ g)(y) = y$ per ogni $y \in Y$, e tale g si dice *inversa* di f. Provare che f è invertibile se e solo se è bigettiva.

Esercizio 4 Stabilire se la funzione assegnata sia iniettiva, surgettiva, bigettiva:

(a) Tutte quelle che sono funzioni dell'Esercizio 1;

(b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = 3n$;

(c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = \left[\frac{2n}{5}\right]$;

(d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = n^4$;

(e) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad f(n) = (-1)^{n+1} \left[\frac{n+1}{2}\right]$;

(f) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad f(n) = (-1)^{n+1} \left[\frac{n}{4}\right]$;

(g) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad f(n) = (-1)^n n^3$;

(h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 7x - 4;$

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^5;$

(j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 5x + 10;$

(k) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x-3}{x^4+1};$

(l) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{3x}{2+|x|};$

(m) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & \text{per} \quad x \geqslant 0 \\ x - 2x^2 & \text{per} \quad x < 0. \end{cases}$

Esercizio 5 Disegnare il grafico della funzione assegnata:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x - 5;$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left|\frac{1}{3}x - 2\right|;$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x - 3| - |x + 5|;$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |2x - 3| - |3x + 2|;$

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 4x - 9;$

(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - 4x - x^2;$

(g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x^2 - 2x - 3|;$

(h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |8 - 2x - x^2|;$

(i) $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad f : X \to X,$
$f(x) =$ il resto della divisione $(2x - 1)^2 : 5;$

(j) $X = [0, 1], \quad f : X \to X, \quad f(x) = x^2.$

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Sì.

(b) No.

(c) Sì.

(d) No.

(e) Sì.

(f) No.

(g) Sì.

(h) No.

(i) No.

(j) Sì.

(k) No.

(l) No.

Soluzione dell'esercizio 2

(a) $(g \circ f)(-27) = (f \circ g)(-27) = 9$;

(b) $(g \circ f)(7) = -\frac{1}{3}$ e $(f \circ g)(7) = \frac{7}{5}$;

(c) $(g \circ f)(4) = 7$ e $(f \circ g)(-8) = \frac{79}{11}$;

(d) $(g \circ f)(x) = \begin{pmatrix} 2x^3 + 2x + 1 \\ x^3 - 4x + 8 \\ -36x^2 + 18x - 43 \end{pmatrix}$.

Soluzione dell'esercizio 3

- Se f è invertibile con inversa g proviamo che f è:

- *iniettiva*: se $f(x_1) = f(x_2)$ allora $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, ovvero $x_1 = x_2$;
- *surgettiva*: dato $y \in Y$ abbiamo $y = f(g(y))$ dunque y è nell'immagine di f.

- Se f è bigettiva dato $y \in Y$ prendiamo l'unico $x \in X$ tale che $f(x) = y$, e poniamo $x = g(y)$, ottenendo una funzione $g : Y \to X$; proviamo che:
  - $(g \circ f)(x) = x$, infatti se $y = f(x)$ per definizione $g(y)$ è il punto di X la cui immagine tramite f è y, dunque è x;
  - $(f \circ g)(y) = y$, infatti se $g(y) = x$ per definizione abbiamo $f(x) = y$.

Soluzione dell'esercizio 4 Scriviamo le risposte S/N-S/N alle domande "iniettiva?"/"surgettiva?".

(a-a) N-N

(a-c) S-N

(a-e) N-N

(a-g) N-N

(a-j) N-N

(b) S-N

(c) N-S

(d) N-N

(e) S-S

(f) N-S

(g) S-N

(h) S-S

(i) S-S

(j) N-N

(k) N-N

(l) S-N

(m) N-S