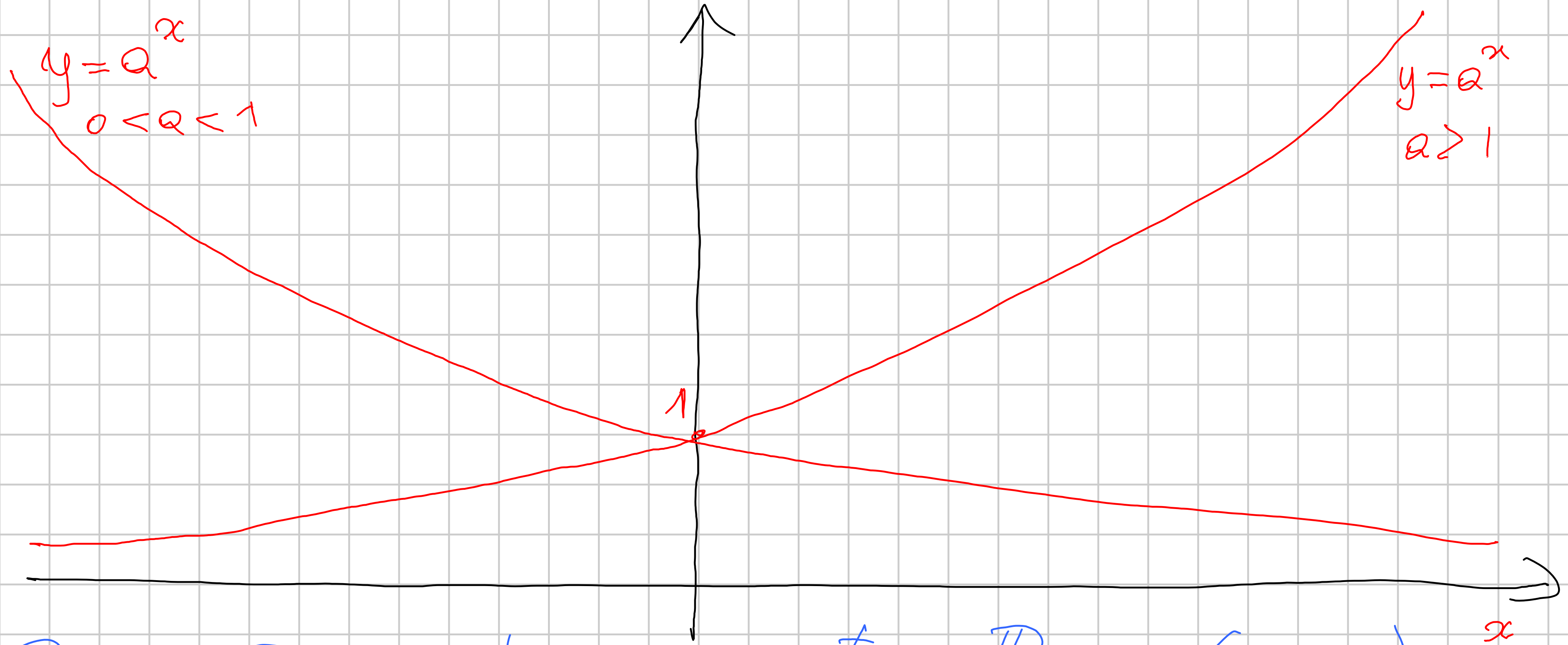
Matematica e statistica 20/11/18

<u>Visto</u>: $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$

esponenziale in base a

$$\mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$$

$$x \longmapsto a^x$$



Oss: è una biiezione tra $\mathbb{R}$ e $(0, +\infty)$.

<u>Def</u>: chiamo logaritmo in base a

$$\log_a : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

che è l'inversa dell'esponenziale in base a:

<u>cioè</u>: $\log_a(x) = y$ se $a^y = x$.

"$\log_a(x)$ è l'esponente a cui bisogna elevare a per trovare x".

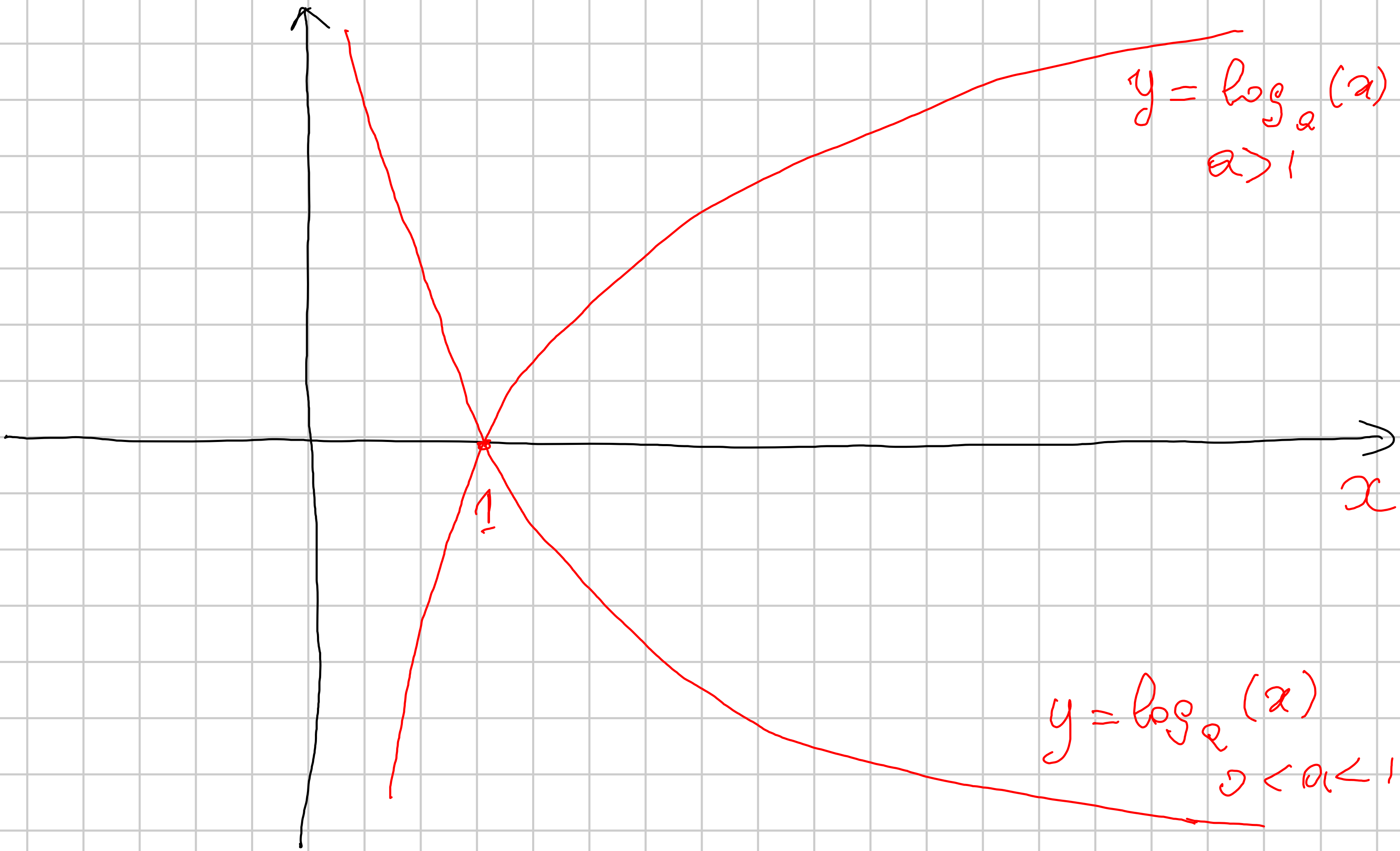
Es:

$$\log_2(8) = 3$$

$$\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = -4$$

$$\log_{\sqrt{3}}(27) = 6$$

Grafici:



Oss: $\log_a(x)$ esiste solo per $x > 0$

$\log_a$ è crescente per $a > 1$, decrescente per $0 < a < 1$.

Proprietà:

- $a^{\log_a(x)} = x$ (per $x > 0$)
- $\log_a(a^x) = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

Infatti: $a^{(\log_a(x) + \log_a(y))}$

$= a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = x \cdot y$ ✓

- $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$

infatti $a^{y \cdot \log_a(x)} = \left(a^{\log_a(x)}\right)^y = x^y$ ✓

- $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

infatti $\log_a(x) = \log_a\left(b^{\log_b(x)}\right)$

$= \log_b(x) \cdot \log_a(b) \Rightarrow \ldots \checkmark$

- $\log_b(a) = \dfrac{1}{\log_a(b)}$

- $\log_{(a^y)}(x) = \dfrac{1}{y}\log_a(x)$

infatti

$$\left(a^{y}\right)^{\frac{1}{y}\cdot \log_a(x)} = \left(a^{y\cdot\frac{1}{y}}\right)^{\log_a(x)}$$

$$= a^{\log_a(x)} = x$$

---

logaritmo naturale : ln in base $e = 2.71\ldots$

numero di Nepero

logaritmo in base 10 : Log

Ese 4 (ins/funz)

Dire se f è iniettiva e/o surgettiva.

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ $\quad f(n) = (-1)^n n^3$

$f(0) = 0 \quad f(1) = -1 \quad f(2) = 8 \quad f(3) = -27$

iniettiva $\quad k = 2 \notin \operatorname{Im}(f)$ non surgettiva.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 7x - 4$

iniettiva? $7x_1 - 4 = 7x_2 - 4 \Rightarrow x_1 = x_2$ Sì

suriettiva? È vero che $\forall y \in \mathbb{R}$ $\exists x$ t.c.

$$y = 7x - 4 \;?$$ Sì: $x = \frac{1}{7}(y+4)$.

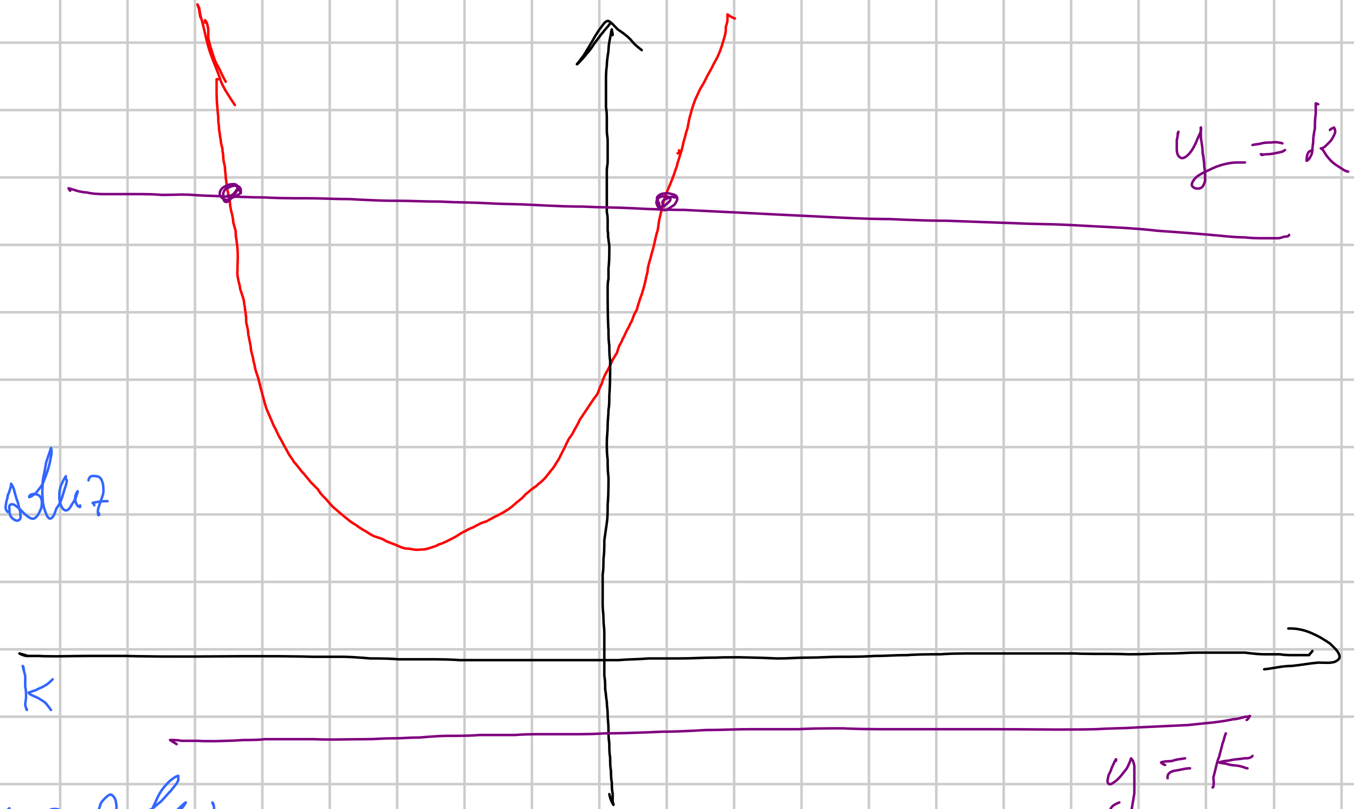
$\Rightarrow$ suriettiva

(x è unico: anche iniettiva).

Invertibile con inversa $f^{-1}(y) = \frac{1}{7}(y+4)$.

(j) $f(x) = x^2 + 5x + 10$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\Delta = 25 - 40 < 0$



iniettiva: l'eq. $f(x) = k$
ha sempre al più una sol.

suriettiva: l'eq. $f(x) = k$
ha sempre almeno una sol.

$\Longrightarrow$ né iniettiva né surgettiva

(k) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x)=\dfrac{x-3}{x^4+1}$

Iniettiva?

$$\frac{x_1-3}{x_1^4+1}=\frac{x_2-3}{x_2^4+1} \overset{?}{\Longrightarrow} x_1=x_2$$

$$x_1x_2^4+x_1-3x_2^4-\cancel{3}=x_2x_1^4+x_2-3x_1^4-\cancel{3}$$

$$x_1-x_2-x_1x_2(x_1^3-x_2^3)+3(x_1^4-x_2^4)=0$$

$$\cancel{(x_1 - x_2)}\Big(1 - x_1 x_2 \left(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2\right) + 3\left(x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^3\right)\Big) = 0$$

finire i calcoli . . . ci torniamo.

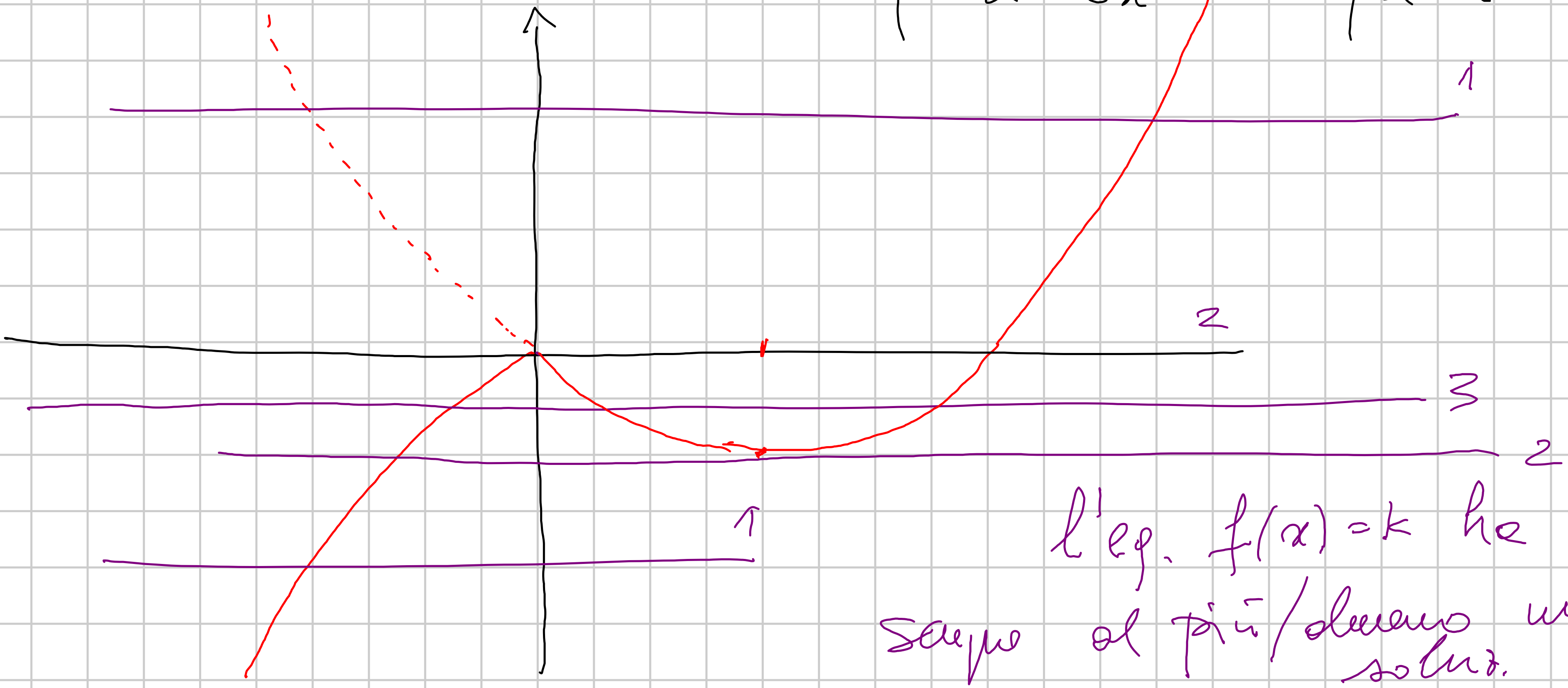
$$f(x) = \frac{x-3}{x^4+1}$$ surgettiva?

Noto che per $|x| \gg 0$ ho $|f(x)| \ll 1$

$\Longrightarrow$ non è surgettiva.

y = k
-10
10

(m) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x)=\begin{cases} 2x^2-x & \text{per } x\geq 0 \\ x-2x^2 & \text{per } x<0. \end{cases}$

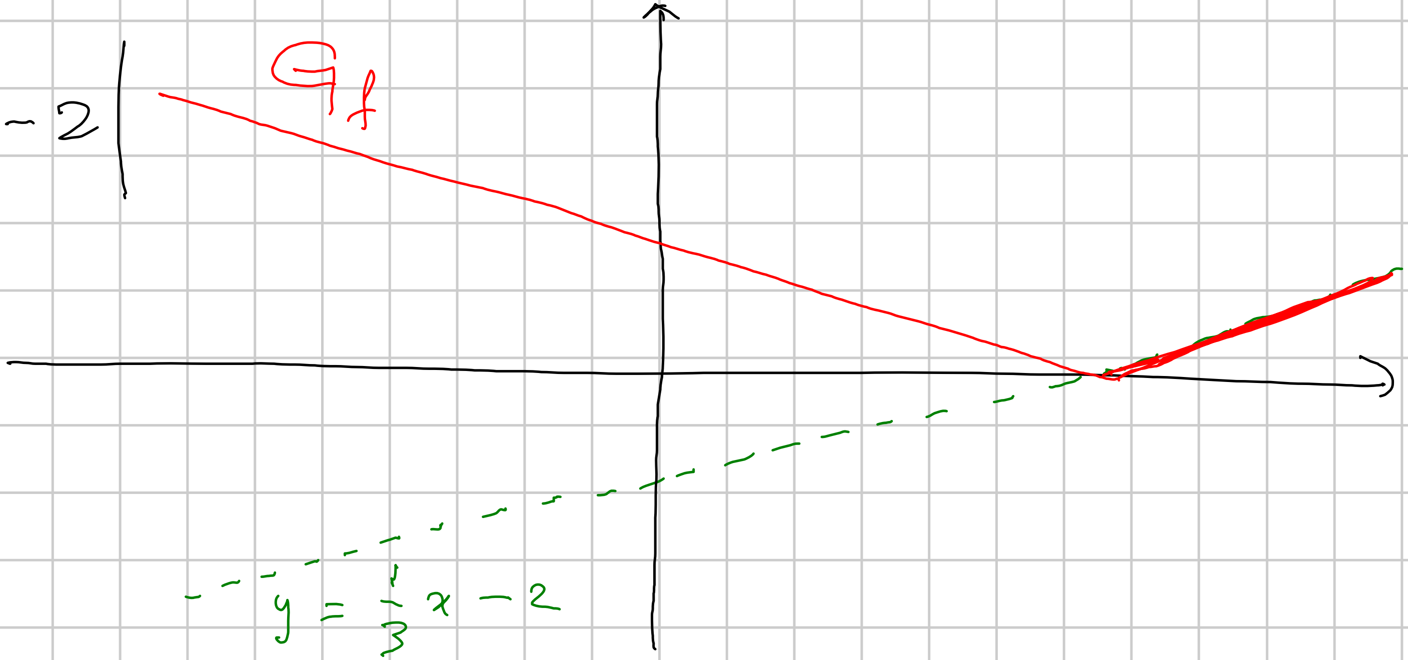


l'eq. $f(x)=k$ ha sempre al più/almeno una soluz.

suriettiva ma non iniettiva.

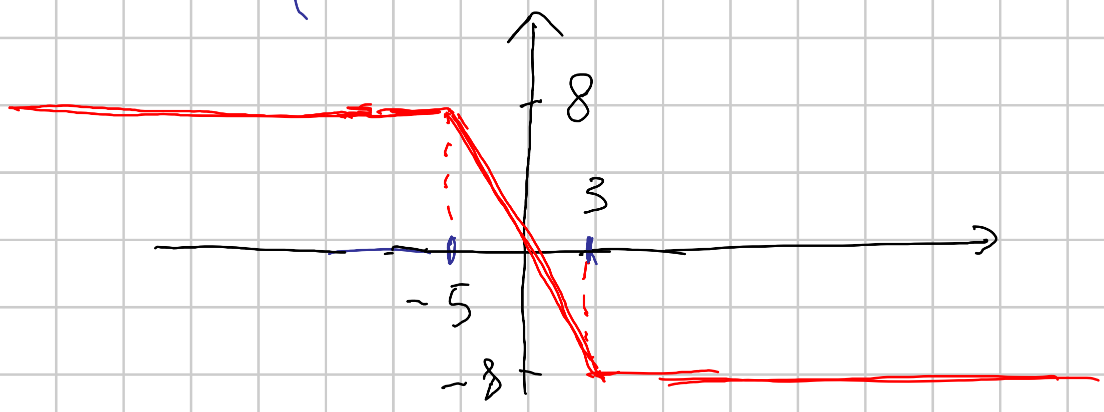
$\boxed{\text{Ese 5}}$ Disegnare grafico di $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(b) $f(x) = \left| \frac{1}{3}x - 2 \right|$



(c) $f(x) = |x-3| - |x+5|$

$$f(x) = \begin{cases} -(x-3)+(x+5) = 8 & \text{pu } x < -5 \\ -(x+3)-(x+5) = -2x-8 & \text{pu } -5 \le x \le 3 \\ x-3-(x+5) = -8 & \text{pu } x > 3 \end{cases}$$



Foglio "Polinomi"

$\boxed{1}$ Risolvere :

(c) $4x > -9$ $\qquad x > -\frac{9}{4}$

(d) $-3x \geq 7$ $\qquad x \leq -\frac{7}{3}$

(h) $x^2 + 4x - 12 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{1} = -2 \pm 4 = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ -6 \end{matrix} \right.$$

(j) $3x^2 + (\sqrt{3} - 3\sqrt{6})x - 3\sqrt{2} = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{6} \pm \sqrt{(3 - 18\sqrt{2} + 54) + 36\sqrt{2}}}{6}$$

$$= \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{6} \pm (\sqrt{3} + 3\sqrt{6})}{6} \left\langle \begin{matrix} \sqrt{6} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{matrix} \right.$$

$\boxed{3}$

$$(x+3)(2x-1) = 4(3x-2) - x^2$$

$$2x^2 + 6x - 3$$
$$- x + 8$$
$$+ x^2 - 12x = 0$$

$$3x^2 - 7x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 60}}{6}$$

Impossibile

$\boxed{5}$ Risolvere $(1-k^2)x^2+4kx+k^2=1$ al variare di $k\in\mathbb{R}$.

$k=1$: $4x+1=1$ $x=0$

$k=-1$: $-4x+1=1$ $x=0$

$k\neq\pm1$ $(1-k^2)x^2+4kx+k^2-1=0$

$$\frac{\Delta}{4}=4k^2+\left(k^4-2k^2+1\right)=\left(k^2+1\right)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-2k \pm (k^2+1)}{1-k^2}$$ 2 soluzioni.

$\boxed{7}$ $$(x+1)^3 - x(x^3+3) = x(x^2+x)+2$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$-x^4 \qquad -3x$$

$$-x^3 - x^2 \qquad -2 = 0$$

$$-x^4 + 2x^2 - 1 = 0$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

$$(x^2 - 1)^2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1.$$

$\boxed{8}$ $$x^3 - 4x^2 - 2x + 12 = 0$$

Se c'è una soluz. raz. è $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6,$
± 12

$x = 1 \qquad 1 - 4 - 2 + 12 \neq 0 \qquad$ No

$x = -1 \qquad -1 - 4 + 2 + 12 \neq 0 \qquad$ No

$x = 2 \qquad 8 - 16 - 4 + 12 = 0 \qquad$ Sì

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & -4 & -2 & 12 \\
2 & & 2 & -4 & -12 \\
\hline
 & 1 & -2 & -6 & /
\end{array}
$$

$x^2 - 2x - 6$

$x_1 = 2 \qquad x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{7}$

$\boxed{9}$ $\quad 2x^4 - 9x^3 + 2x^2 + 9x - 4 = 0$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$

	2	-9	2	9	-4
1		2	-7	-5	4
	2	-7	-5	4	✓

	2	-7	-5	4
-1		-2	9	-4
	2	-9	4	✓

$$2x_2 - 9x + 4$$

$$x_{3,4} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2} \begin{array}{l} 8 \\ \\ 1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ le soluz. sono $x = 1$ con molt. 2

$x = -1$ " " 1

$x = 8$ " " 1.

$\boxed{10}$ Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$x^3+(k-4)x-2k=0$$

ha una sola soluzione.

Osservo che ho sempre la soluz. $x=2$:

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & k-4 & -2k \\
2 & & 2 & 4 & 2k \\
\hline
 & 1 & 2 & k & /
\end{array}
$$

$$x^2+2x+k=0$$

Voglio che non abbia $\Delta<0$

$$\Delta/4 = 1-k.$$

Risposta: per $k>1$.

(Osservo che se $\Delta=0$, $k=1$ ho soluz $x=-1$:
non va bene)

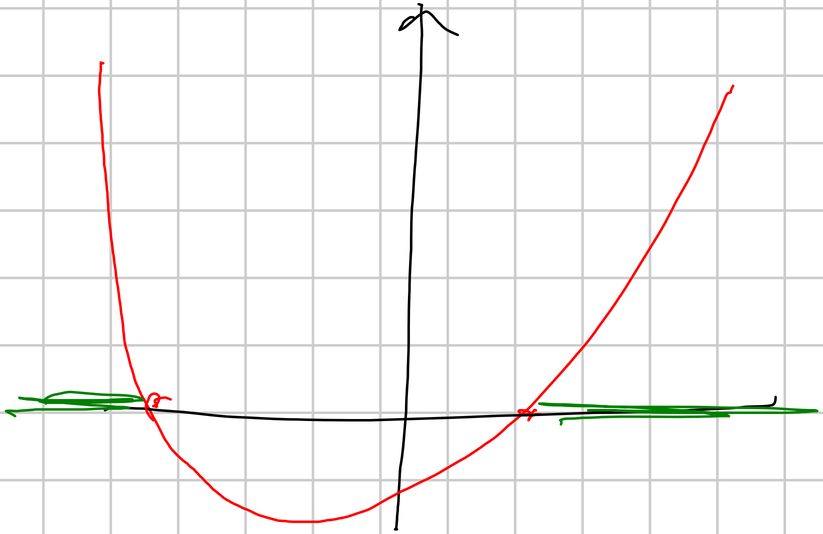
$\boxed{11}$

$$\frac{3}{2}x^2 + 2x - 1 > \frac{1}{2}(x^2 - x) + 5$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x - 6 > 0$$

$$2x^2 + 5x - 12 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 96}}{4} = \frac{-5 \pm 11}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -4 \end{cases}$$



Soluz: $x < -4$ o $x > 3/2$

$\boxed{14}$ Risolvere $x^2 - x \leq k(k+1)$ al variare di k.

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4k^2+4k}}{2} = \frac{1 \pm (2k+1)}{2} \begin{array}{l} \nearrow k+1 \\ \searrow -k \end{array}$$

Soluz. disep: compare tra le soluz. dell'equaz.

Noto: $k+1 = -k$ per $k = -1/2$

$k+1 > -k$ per $k > -1/2$

$k+1 < -k$ per $k < -1/2$

Soluz:

per $k < -1/2$ $\qquad k+1 \leq x \leq -k$

per $k = -1/2$ $\qquad x = 1/2$

per $k > -1/2$ $\qquad -k < x < k+1$.

$\boxed{15}$ $\quad 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 > 0$.

Possibili soluz. eq. associata:

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$.

$x = \pm 1 \qquad \pm 2 - 3 \mp 11 + 6 \qquad$ No

$x = \pm 2 \qquad \pm 16 - 12 \mp 22 + 6 \qquad$ sì $x = -2$

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 2 & -3 & -11 & 6 \\
-2 & & -4 & 14 & -6 \\
\hline
 & 2 & -7 & 3 & \cancel{}
\end{array}
$$

$$2x^2 - 7x + 3$$

$$\frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 =$$

$$= (x+2)(x-3)(2x-1)$$

	-2		$1/2$		3	
$-$		$+$		$+$		$+$
$-$		$-$		$-$		$+$
$-$		$-$		$+$		$+$
$-$		$+$		$-$		$+$

Soluz: $-2 < x < 1/2$ o $x \geq 3$.