

Mat Stat 14/11/18

Ese 8

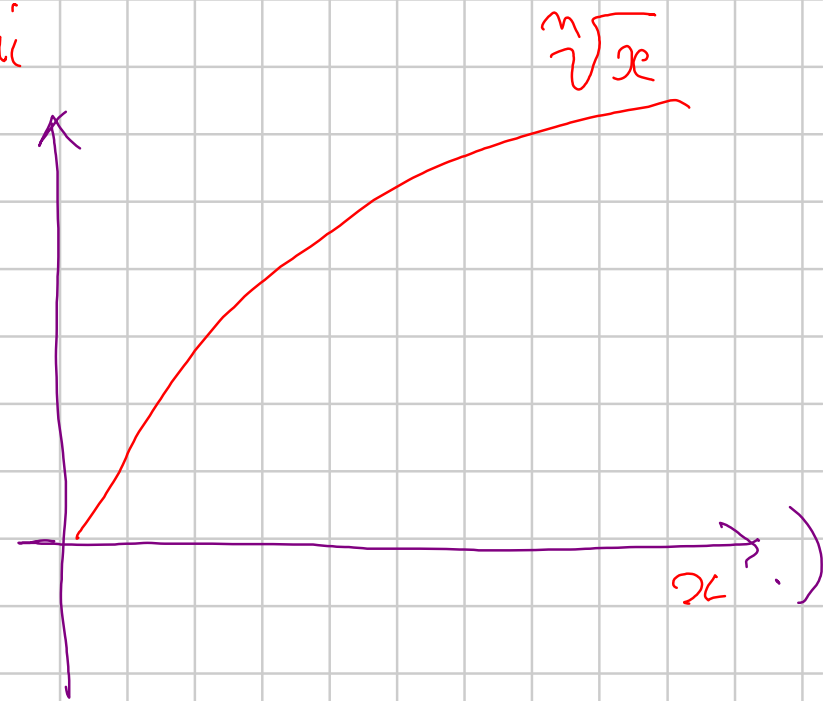
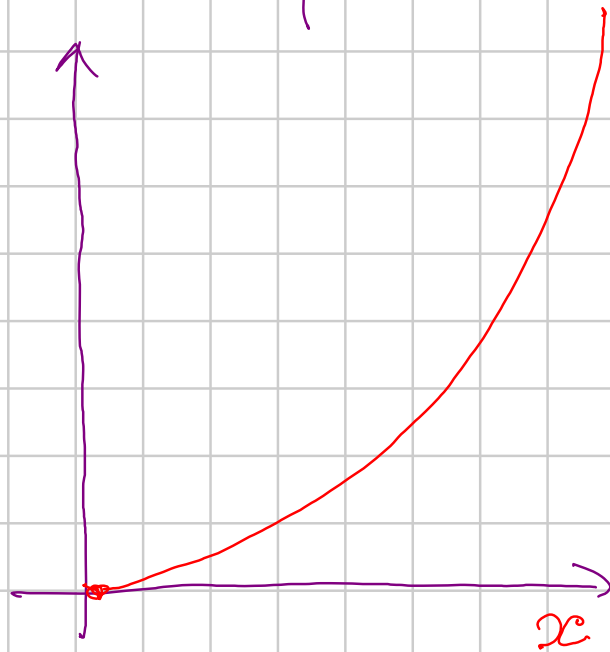
7.87 %

Equoz. e dispropoz. irrazionali

Se $x \in \mathbb{R}$,

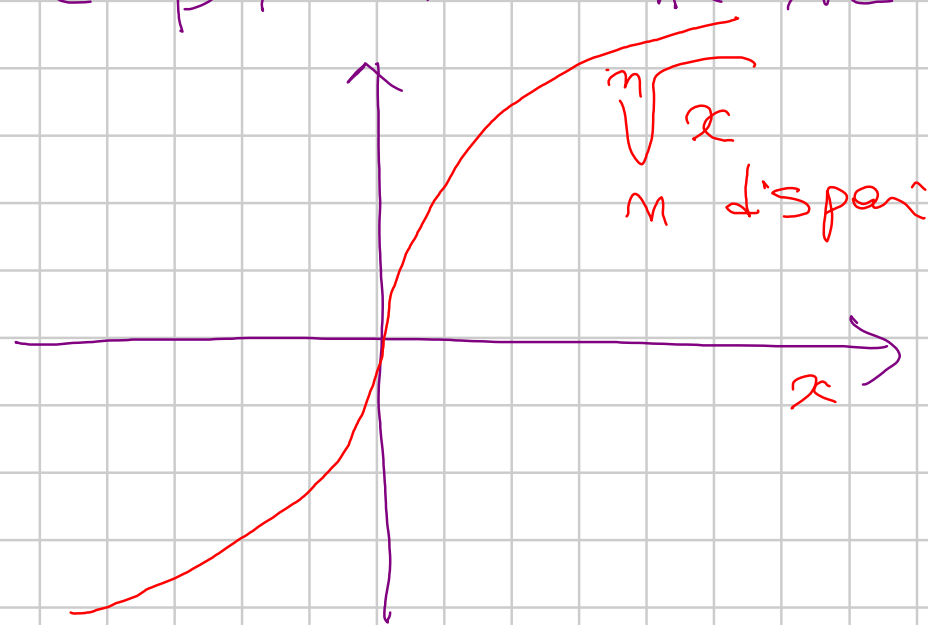
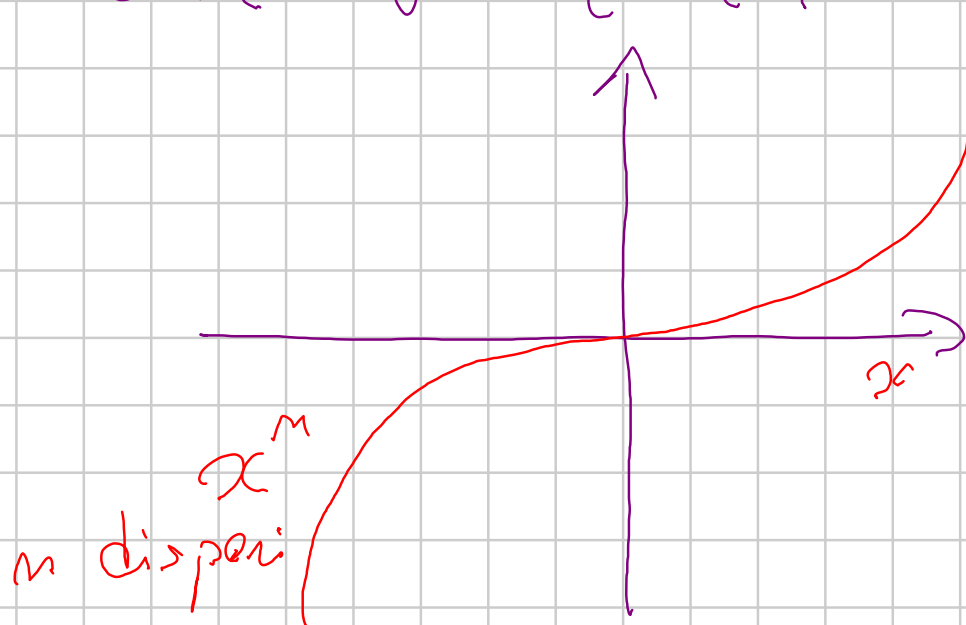
- per n pari; $x \geq 0$, allora $\sqrt[n]{x}$ l'unico $y \geq 0$
t.c. $y^n = x$

$(\sqrt[n]{})$ è la funzione inversa
della potenza n $[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$



• per n dispari chiamo $\sqrt[n]{x}$ l'unico $y \in \mathbb{R}$ t.c.
 $y^n = x$ (oss: y è concorde con x).

cioè $\sqrt[n]{}$ è l'inverso delle potenze n $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



• n dispari :

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

equivalente

$$f(x) = g(x)^n$$

$$\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x)$$

equivalente

$$f(x) \leq g(x)^n$$

<

<

$\geq$

$\geq$

>

>

n pari

$$\bullet \quad \sqrt[n]{f(x)} = g(x) \text{ equivale a } \begin{cases} f(x) = g(x)^n \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

(le condizione di esistenza $f(x) \geq 0$ è automatica)

$$\bullet \quad \sqrt[n]{f(x)} \leq g(x) \text{ equivale a } \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g(x)^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{f(x) \geq g(x)}$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

equivalente a

oppure

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g(x)^n \end{cases}$$

$f(x) \geq 0$ automatica

Esponenziali e Logaritmi

Fisso $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Ho definito $a^n = a \cdot \dots \cdot a$

$$\sqrt[n]{a}$$

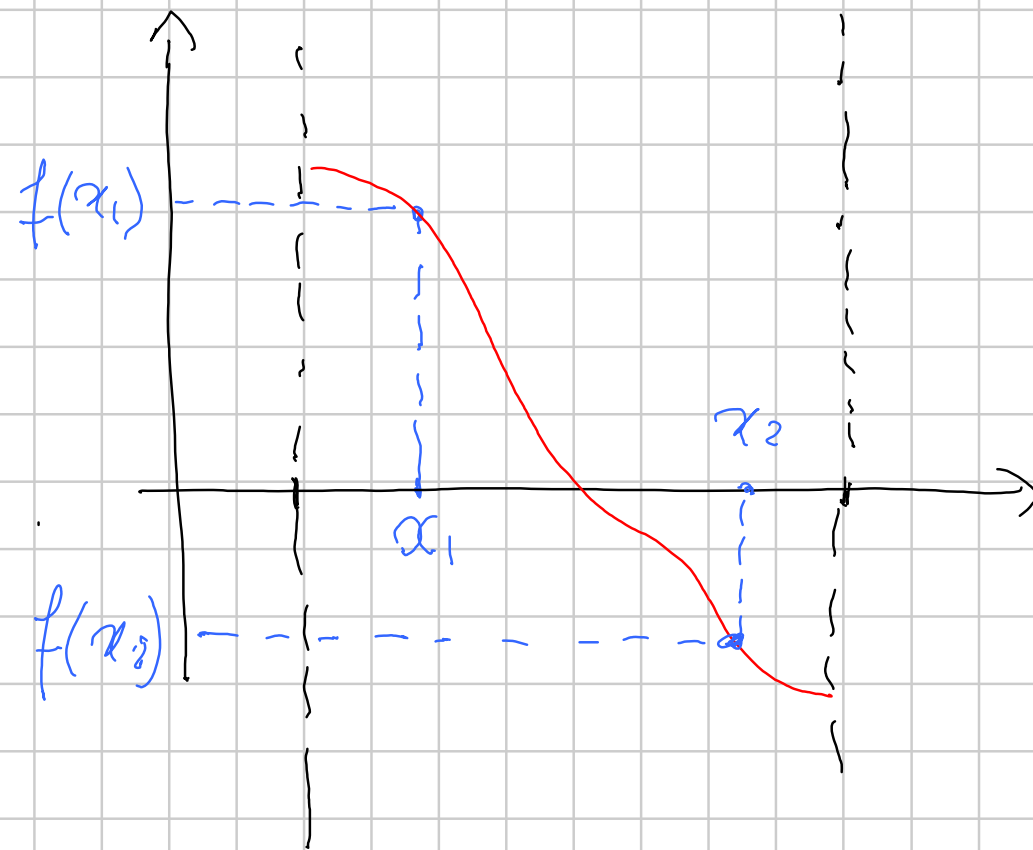
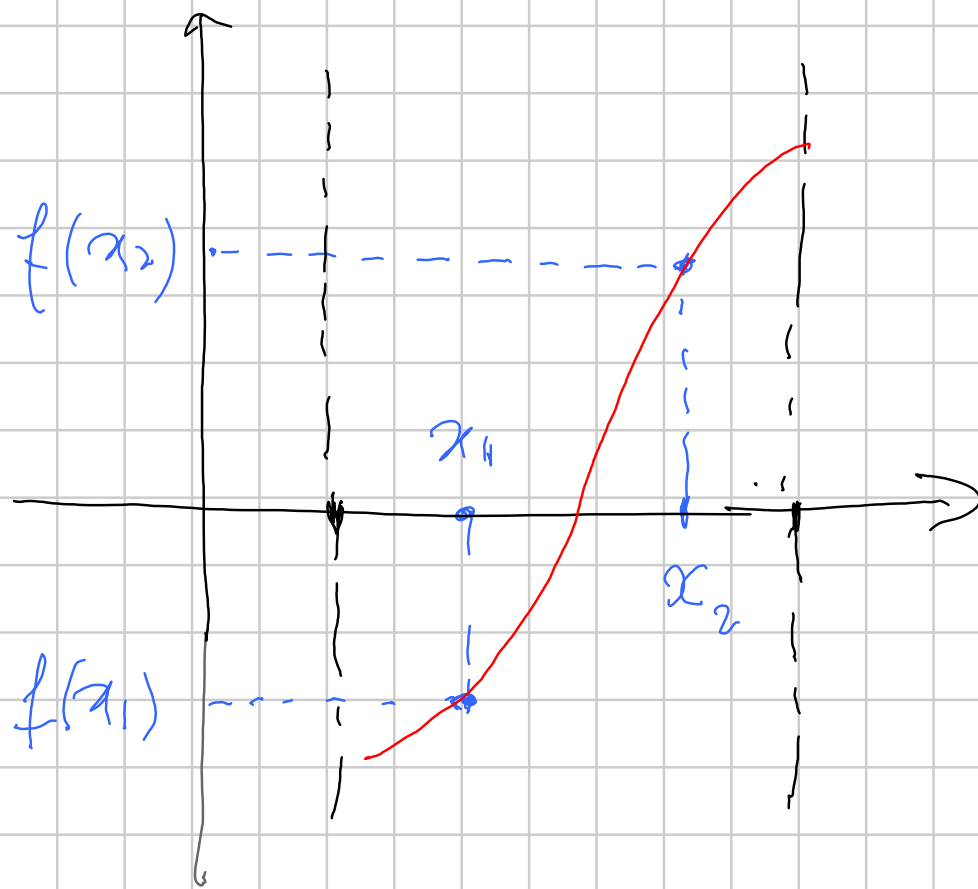
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Posso quindi definire $\forall x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Def: se $I \subset \mathbb{R}$ è intervallo/semi-retta/tutto $\mathbb{R}$
e ho $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dico che f è

- crescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- decrescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Oss: la funzione $x \mapsto a^x$ definita in $\mathbb{Q}$ è
crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$

Sufficienza se $x_1 < x_2$ e $a > 1$

$$a^{x_2 - x_1} > 1$$

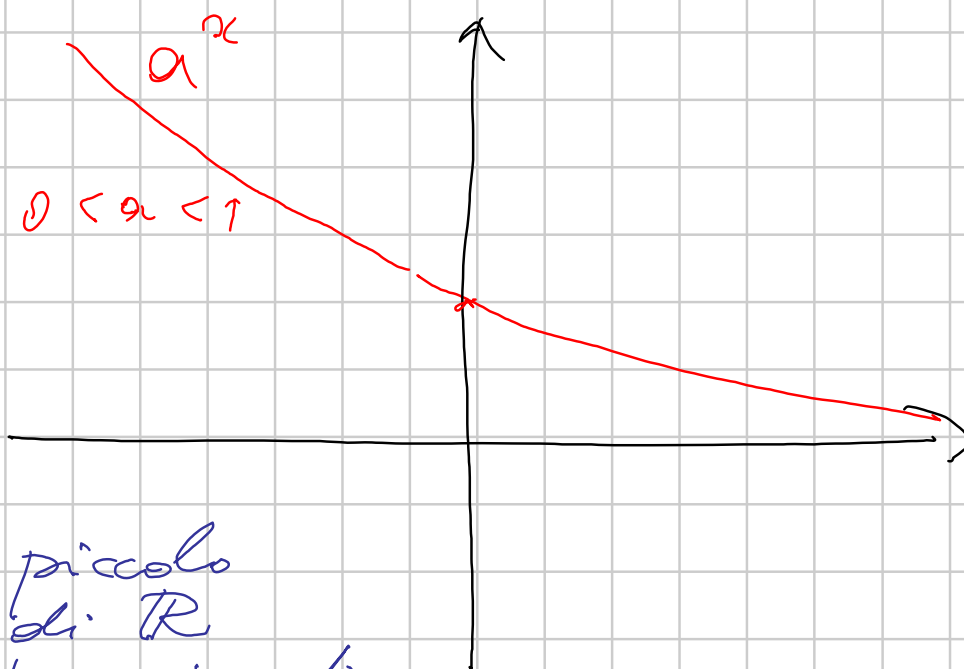
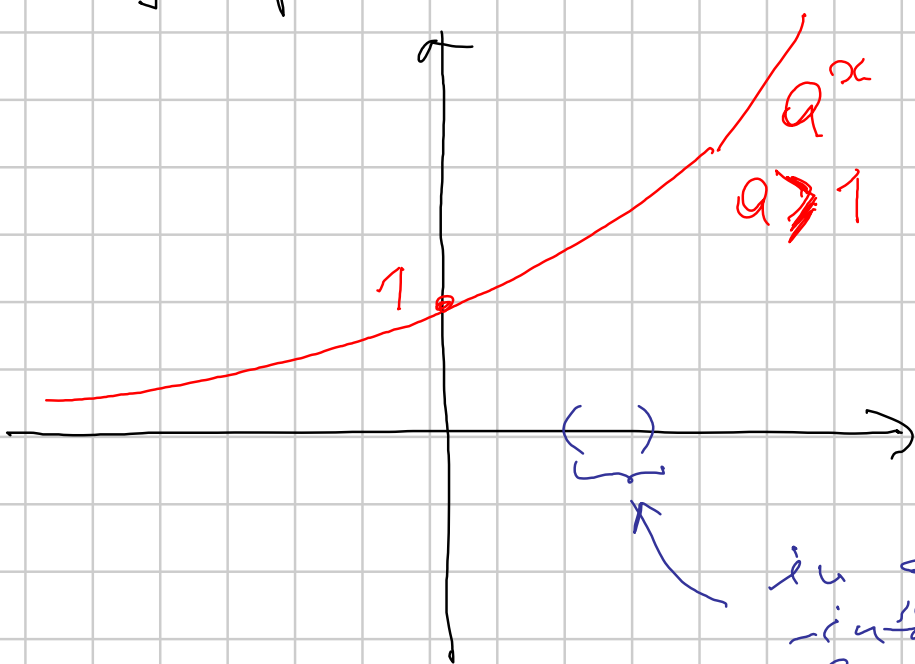
$$\Rightarrow a^{x_2} \cdot a^{-x_1} > 1$$

$$\Rightarrow a^{x_2} \cdot \frac{1}{a^{x_1}} > 1$$

$$\Rightarrow a^{x_2} > a^{x_1}$$

(Analog. per $0 < a < 1$.)

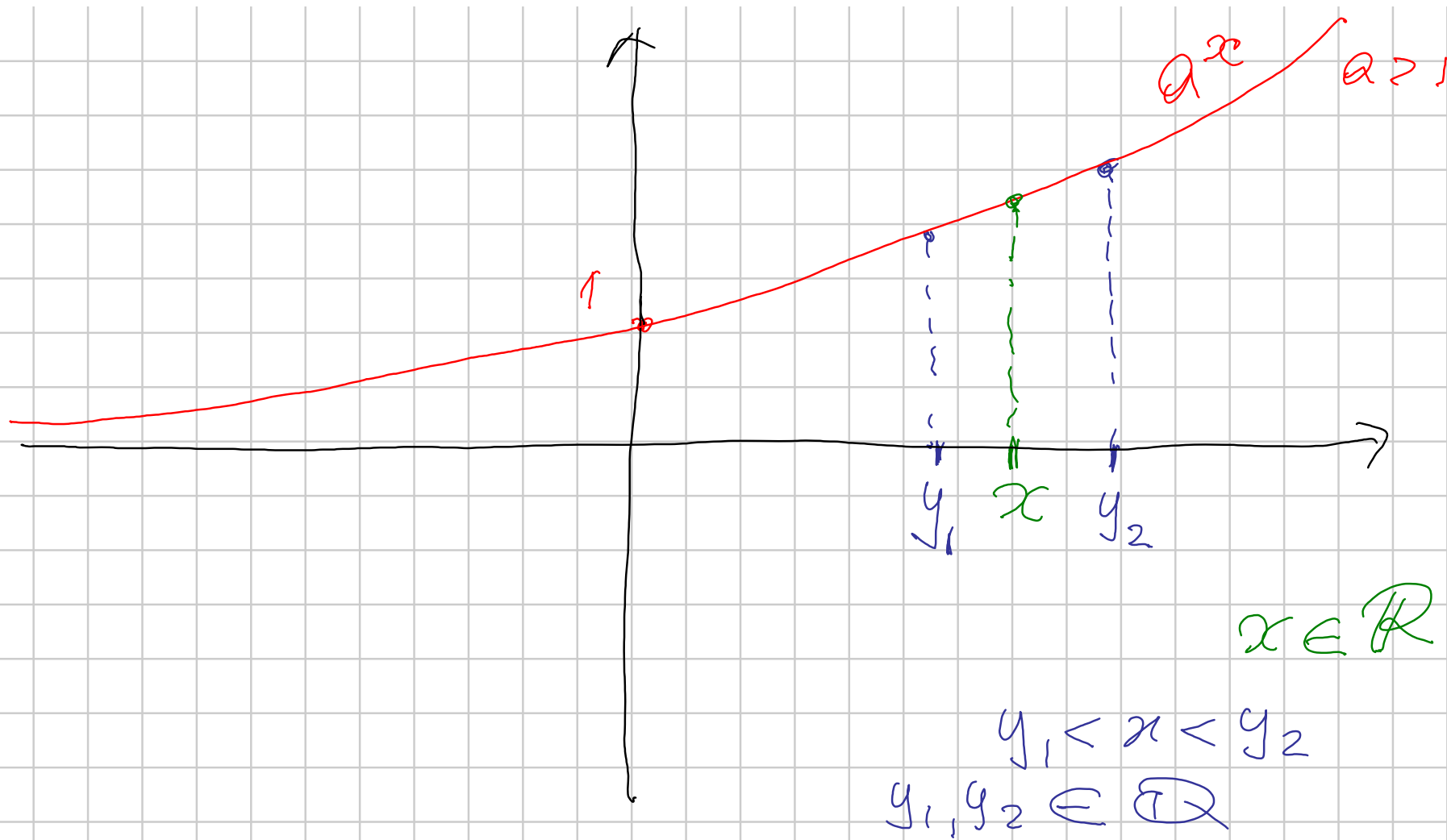
Grafici di a^x (per $x \in \mathbb{Q}$) sono



in qualsiasi piccolo
intervallo di $\mathbb{R}$
ho infiniti razionali

Fatto : è possibile estendere la def.
di a^x $\forall x \in \mathbb{R}$ in modo che
rimanga crescente per $a > 1$, decrescente per $0 < a < 1$.

Si chiama esponenziale in base a .



$$\Rightarrow a^{y_1} < a^x < a^{y_2}$$

(analogamente per $0 < a < 1$).

————— 0 —————

Proprietà:

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

Tra le esponenziali è importante quella
in base e = numero di Nepero $= 2.71 \dots$
così definito:

Ricordo: $m \in \mathbb{N}$ definisco m fattoriale:

$$m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

$$\text{Es: } 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Per convenzione $0! = 1$.

Allora e è la somma dei reciproci dei fattoriali di tutti i numeri naturali

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$$

Somma infinita che con
 risultato finito = 2.71...
 poiché gli addendi diventano
 molto piccoli procedendo.



$$f(147) = 2 + 3 + 3 = 8$$

$$f(951) = 6 + 5 + 2 = 13$$

$$\frac{m^3 - 1}{m - 1} = m^2 + m + 1$$

$$f(0) = \mathbb{Z}$$

$$f(3) = t$$

$$f(1) = 0$$

$$f(4) = f$$

$$f(2) = t$$

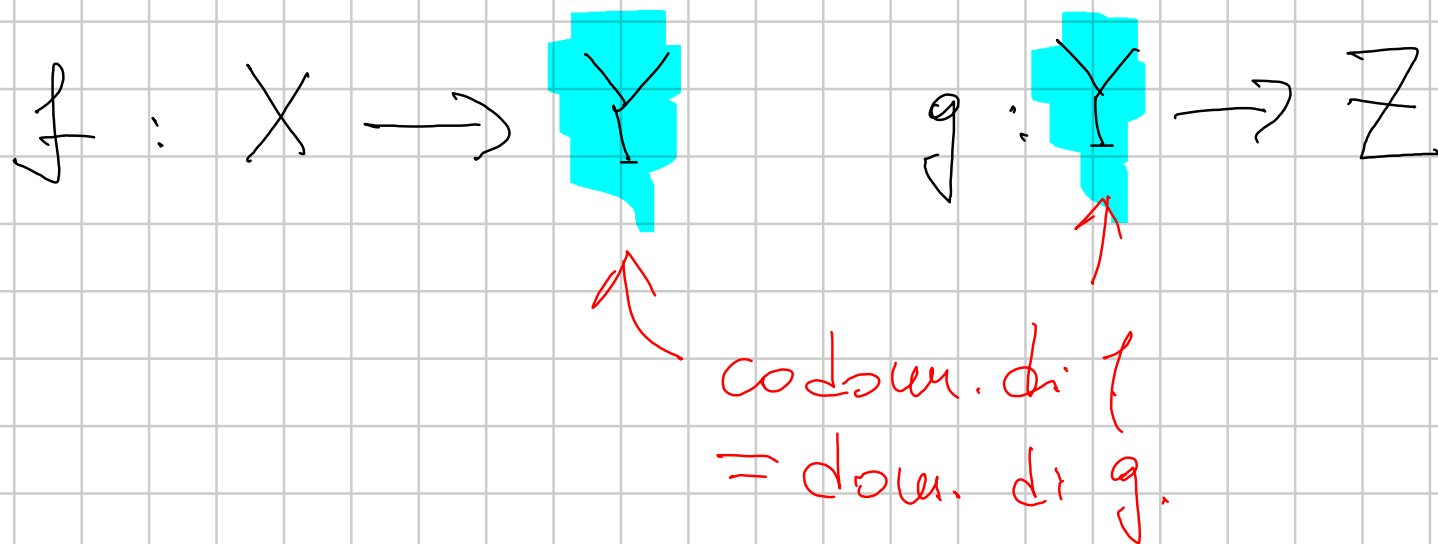
...

$$f(0) = \underset{\uparrow}{\text{zero}} = 0$$

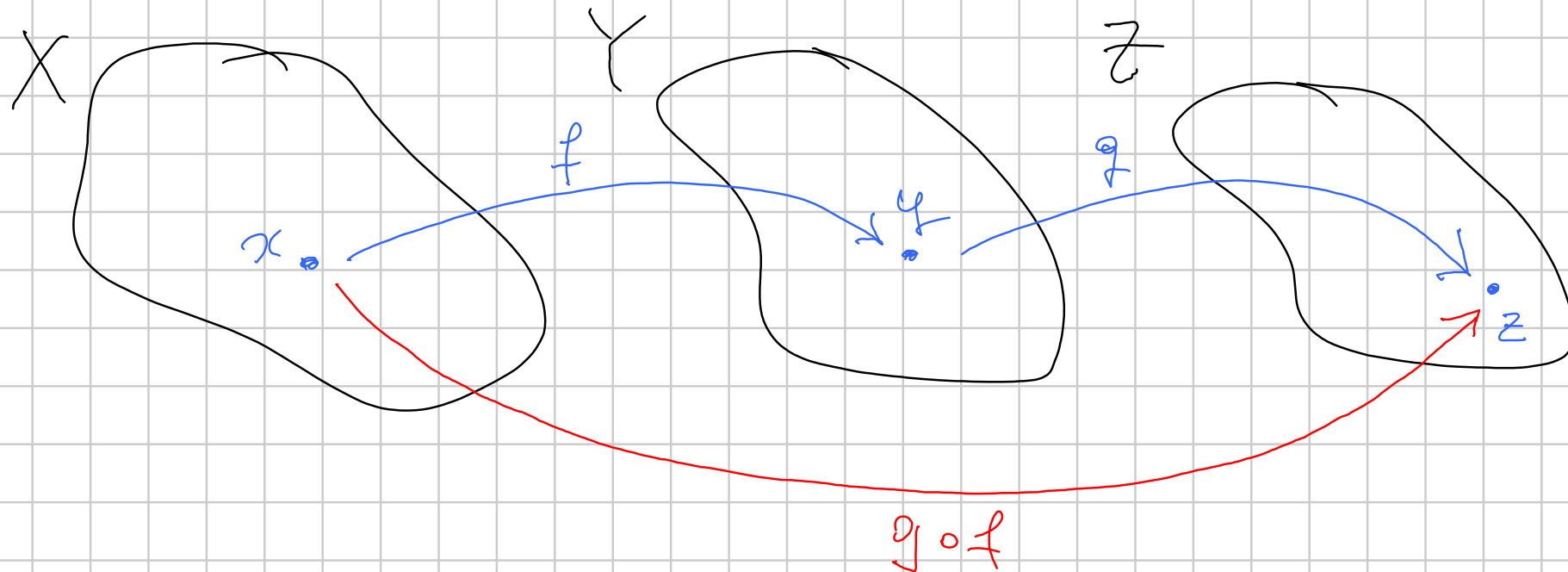
$$f(2) = \underset{\uparrow}{\text{two}}$$

∞
 $\equiv$

2 Se ho due funzioni



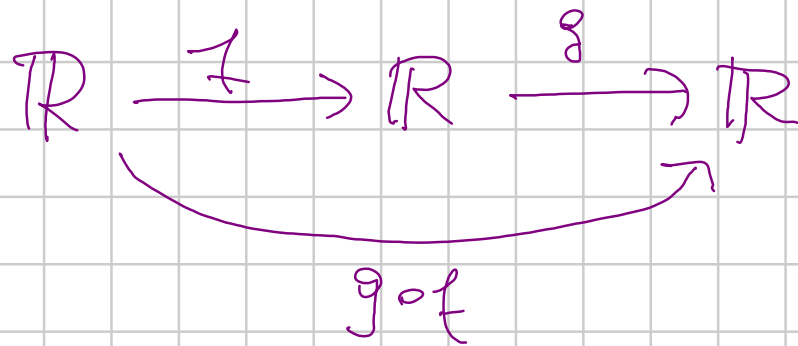
definisco $g \circ f: X \rightarrow Z$
 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$



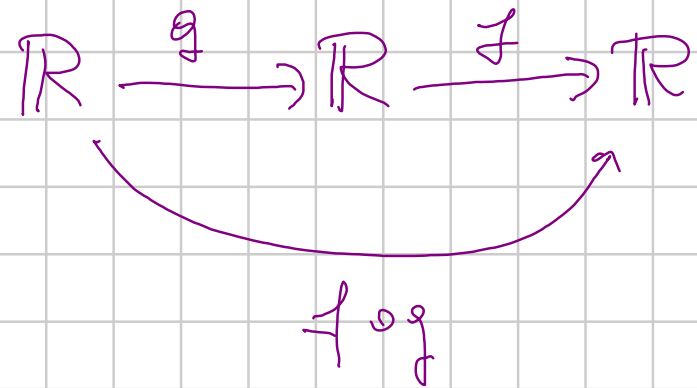
$g \circ f = g$ composta con f

(b) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{3x-1}{x+5}$ $g(x) = x-2$.

Calcolare $(g \circ f)(7)$ e $(f \circ g)(7)$.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$


$g \circ f$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$


$f \circ g$

$$(g \circ f)(7) = g(f(7)) = g\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

$$(f \circ g)(7) = f(g(7)) = f(5) = \frac{7}{5}$$

[4] Dire se f è iniettiva / surgettiva / biettiva

Eser 1 - (a) : $f(n) = \text{numero tratti in } n$

$$f(5) = f(2) = 5 \quad \underline{\text{non iniettiva}}$$

$$0, 1 \notin \text{Im}(f) \quad \underline{\text{non surgettiva}}$$

Eser 1) - (e) $f: \mathbb{N} \rightarrow \text{d.f. obetti}$

$$f(n) = \text{iniz. d. } n \text{ in riprese}$$

$$f(2) = f(3) = t \quad \text{non injective}$$

$$k \notin \text{Im}(f) \quad \text{non surjective}$$

Es. (1)-(g) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \quad f(m) = \frac{2m^5 - 1}{m^4 + 1}$

Injective: $f(0) = -1 \quad f(1) = \frac{1}{2} \quad f(2) = \frac{63}{17} \quad f(3) = \frac{485}{82}$
 $f(-1) = -\frac{3}{2} \quad f(-2) = -\frac{65}{17} \quad f(-3) = -\frac{487}{82}$

" $\overline{\Delta L}$ "

Supettiva: $0 \notin \text{Im}(f)$ no -

Es (1)-i $X = \text{pop. mond.}$ $f(x) = \text{il nonno paterno.}$

Non è iniettiva ; non surgettiva -

(b) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $f(m) = 3m$
iniettiva non sur.

$$(c) \quad f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad f(n) = \left[\frac{2^n}{5} \right]$$

$[x] = \text{parte
intera di } x$

$f :$

0	$\mapsto$	0	}
1	$\mapsto$	0	
2	$\mapsto$	0	
3	$\mapsto$	1	}
4	$\mapsto$	1	
5	$\mapsto$	2	}
6	$\mapsto$	2	
7	$\mapsto$	2	
8	$\mapsto$	3	}
		3	

non suriettiva

suriettiva

$\left. \begin{matrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{matrix} \right\}$

(e) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ $f(n) = (-1)^{n+1} \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	+1	-1	+2	-2	+3	-3	+4	-4

f bijectiva —