

Matematika e statistika 13/11/18

Eq. II grado: $ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ discriminante

$\Delta < 0$ no solut.; se $\Delta = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

($\Delta = 0 : x_1 = x_2$)

Oss: $x_{1,2} = \frac{-(b/2) \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}$

utile se b est paire ou forme 2:

$$3x^2 - 8x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{6} ; x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 15}}{3} = \begin{cases} \frac{5}{3} \\ 1 \end{cases}$$

Disseq. II grado: $ax^2 + bx + c > 0$ $a \neq 0$
 $\geq$
 $<$
 $\leq$

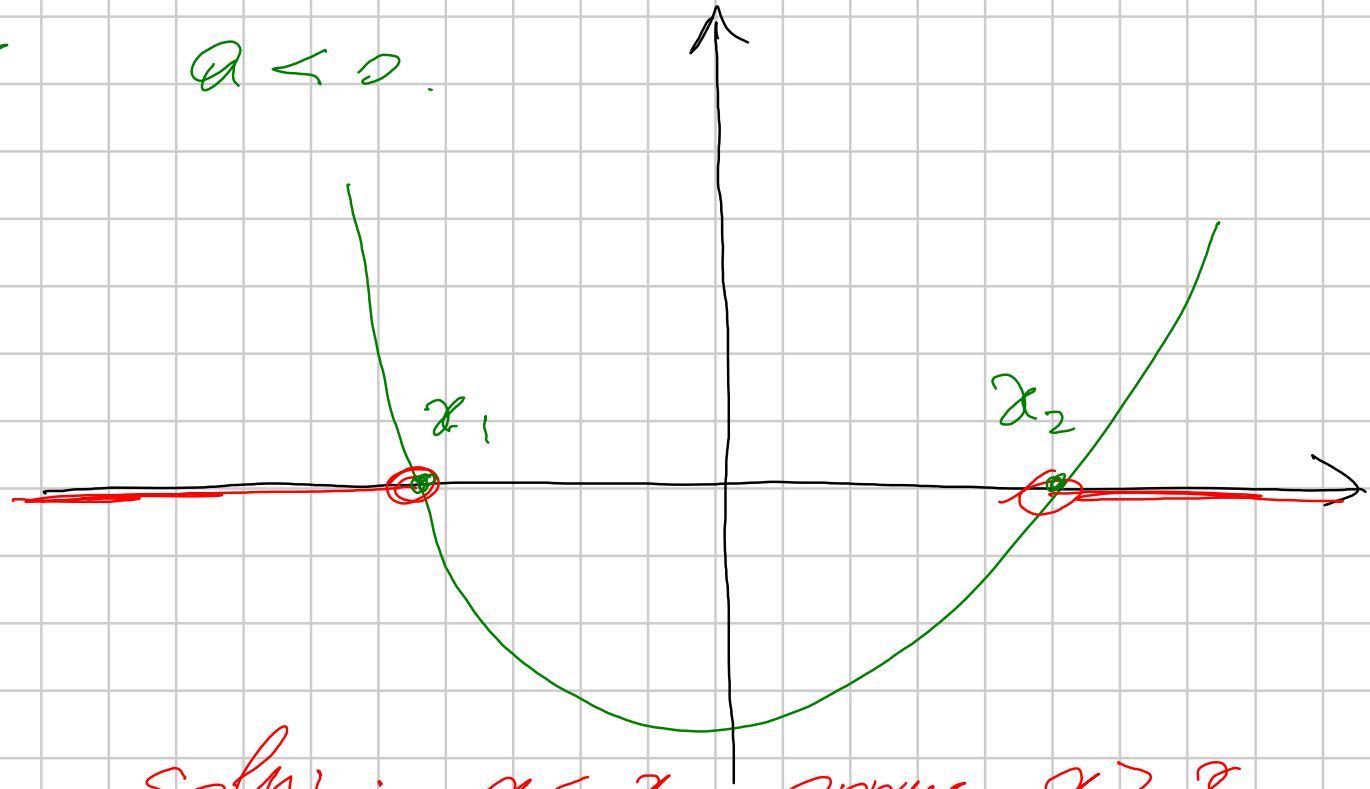
Sempre: iniziare risolvendo l'eq. associata
II grado: ricordare che $ax^2 + bx + c$ ha

grafico una parabola verso l'alto se $a > 0$,
verso il basso se $a < 0$.

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$a > 0$$

$x_{1,2}$ soluz.
ep. associate



soluz: $x \leq x_1$ oppure $x \geq x_2$

$x_{1,2}$ = intersezioni parabola con retta $y=0$
soluz. disp. : ascisse per cui la parabola
sta sopra o uguale ($\geq$) la $y=0$

Eq. polinomiali di grado $d \geq 3$

- non ci sono formule generali

(sì per $d=3$ e $d=4$ ma complicate)

- si può fare ricerca in qualche caso e poi abbandonare il grado del polinomio.

Divisione tra polinomi : dati $f(x), g(x)$ polinomi
con $g(x)$ di grado > 0

$f(x) : g(x)$ ha quoziente $q(x)$ e resto $r(x)$

$f(x)$
dividendo

$g(x)$
divisore

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

con grado di $r(x)$ minore di $g(x)$
oppure $r(x) = 0$.

Def: x_0 è una radice di $f(x)$ se $f(x_0) = 0$.

Teo(Ruffini): x_0 è radice di $f(x) \Leftrightarrow f(x)$ divisibile
per $(x - x_0)$

Dimo: $\Rightarrow$ Eseguo la divisione $f(x) : (x - x_0)$

trovando $f(x) = (x - x_0) \cdot q(x) + r(x)$

con grado $\downarrow r(x) < (\text{grado di } x - x_0) = 1$

$\Rightarrow r(x) = r \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x) = (x - x_0) \cdot q(x) + r$

$$\Rightarrow f(x_0) = \underbrace{(x_0 - x_0)}_0 \cdot \underbrace{q(x_0)}_0 + r$$

$$\Rightarrow r = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - x_0) \cdot q(x) \quad \checkmark$$

$$\Leftarrow \text{Se } f(x) = (x - x_0) \cdot q(x) \text{ allora}$$

$$f(x_0) = (x_0 - x_0) \cdot q(x_0) = 0. \quad \square$$

Abbassamento del grado:

per risolvere $f(x) = 0$ cerco una soluz. x_0 ;
se la trovo divido $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$
(grado di $g(x)$ di 1 inferiore a $f(x)$);
procedo risolvendo $g(x) = 0$.

Criteri: • una equaz. a coeff. razionali equivale
a una a coeff. interi (moltiplicare

per m.c.m (denominatori)

- se l'equez. $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ ha una soluzione razionale allora essa è del tipo $\pm \frac{k}{h}$ dove k divisore di a_0
 h divisore di a_n .

(ATI: può non avere soluz. razionali)

Esempio: $x^4 - \frac{7}{6}x^3 - 9x^2 + \frac{73}{6}x + 5 = 0$

equivale a $6x^4 - 7x^3 - 54x^2 + 73x + 30 = 0$

Se esiste una soluzione razionale è del tipo

$$\pm \frac{1}{1} \quad \pm \frac{2}{1} \quad \pm \frac{3}{1} \quad \pm \frac{5}{1} \quad \pm \frac{6}{1} \quad \pm \frac{10}{1} \quad \pm \frac{15}{1} \quad \pm \frac{30}{1}$$

$$\pm \frac{1}{3} \quad \pm \frac{2}{3} \quad \pm \frac{3}{3} \quad \pm \frac{5}{3} \quad \pm \frac{6}{3} \quad \pm \frac{10}{3} \quad \pm \frac{15}{3} \quad \pm \frac{30}{3}$$

$$\pm \frac{1}{2} \quad \pm \frac{2}{2} \quad \pm \frac{3}{2} \quad \pm \frac{5}{2} \quad \pm \frac{6}{2} \quad \pm \frac{10}{2} \quad \pm \frac{15}{2} \quad \pm \frac{30}{2}$$

$$\pm \frac{1}{6} \quad \pm \frac{2}{6} \quad \pm \frac{3}{6} \quad \pm \frac{5}{6} \quad \pm \frac{6}{6} \quad \pm \frac{10}{6} \quad \pm \frac{15}{6} \quad \pm \frac{30}{6}$$

Devo provare che:

$$x_0 = +1 \quad : \quad 6 \cdot 1 - 7 \cdot 1 - 54 \cdot 1 + 73 \cdot 1 + 30 \neq 0 \quad \underline{\text{No}}$$

$$x_0 = -1 \quad : \quad 6 \cdot (-1) - 7 \cdot (-1) - 54 \cdot 1 + 73 \cdot (-1) + 30 \neq 0 \quad \underline{\text{No}}$$

$$x_0 = 2 : \quad 6 \cdot 16 - 7 \cdot 8 - 54 \cdot 4 + 73 \cdot 2 + 30$$

$$\begin{array}{r} 96 \\ 146 \\ 30 \\ \hline 272 \end{array} \quad \begin{array}{r} 56 \\ 216 \\ \hline \end{array} \quad 272 - 272 = 0$$

Σ

Per il Teo. di Ruffini so che $6x^4 - 7x^3 - 54x^2 + 73x + 30$
 è divisibile per $x - 2$; espro:

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 6 & -7 & -54 & 73 & 30 \\
 2 & & 12 & 10 & -88 & -30 \\
 \hline
 & 6 & 5 & -44 & -15 & \checkmark
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 6x^4 - 7x^3 - 54x^2 + 73x + 30 &= \\
 &= (x-2)(6x^3 + 5x^2 - 44x - 15)
 \end{aligned}$$

Procedo buscando soluz. d. $6x^3 + 5x^2 - 44x - 15 = 0$

Ve como me resolvio:

$$\pm \frac{1 \mid 3 \mid 5 \mid 15}{1 \mid 2 \mid 3 \mid 6}$$

$$x_0 = 5$$

$$6 \cdot 125 + 5 \cdot 25 - 44 \cdot 5 - 15 \\ = 750 + 125 - 220 - 15 \neq 0 \quad \underline{\text{No}}$$

⋮

$$x_0 = -3$$

$$6 \cdot (-27) + 5 \cdot 9 - 44 \cdot (-3) - 15 \\ = -162 + 45 + 132 - 15 = 0 \quad \underline{\text{Yes}}$$

	6	5	-44	-15
-3		-18	+39	15
	6	-13	-5	✓

Paske l'equaz, $6x^2 - 13x - 5 = 0$

$$x_{3,4} = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 120}}{12} = \frac{13 \pm \sqrt{289}}{12}$$

$$= \frac{13 \pm 17}{12} = \begin{matrix} \swarrow \frac{5}{2} \\ \searrow -\frac{1}{3} \end{matrix}$$

Soluz. equaz. d. IV grado insieme:

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -3 \quad x_3 = \frac{5}{2} \quad x_4 = -\frac{1}{3}.$$

Multiplicità di una radice:

Se x_0 è radice di $f(x)$ ho $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$,

Se x_0 non è radice di: $q_1(x)$ mi fermo;

se è radice ho $q_1(x) = (x - x_0) \cdot q_2(x)$

$\Rightarrow f(x) = (x - x_0)^2 \cdot q_2(x)$ - Procedo

finché non trovo:

$$f(x) = (x - x_0)^m \cdot q(x) \quad q(x_0) \neq 0$$

che m è la molteplicità di x_0 .

Es: $f(x) = (x-3)^5 \cdot (x+2)^3 \cdot (x+1) \cdot (x^2 - x + 7)$

$\Delta < 0$
non ha radici

$f(x)$ ha le radici

3 con mult. 5

-2 con mult. 3

-1 con mult. 1

Disq. polinomiali

$$f(x) \geq 0$$

$$> 0$$

$$\leq 0$$

$$< 0$$

Disque :

risolvere

$$f(x) = 0$$

trovando

multiplicità reali

ricordare che

$$(x-x_0)^{2k} \geq 0 \quad \forall x$$

nullo per $x = x_0$

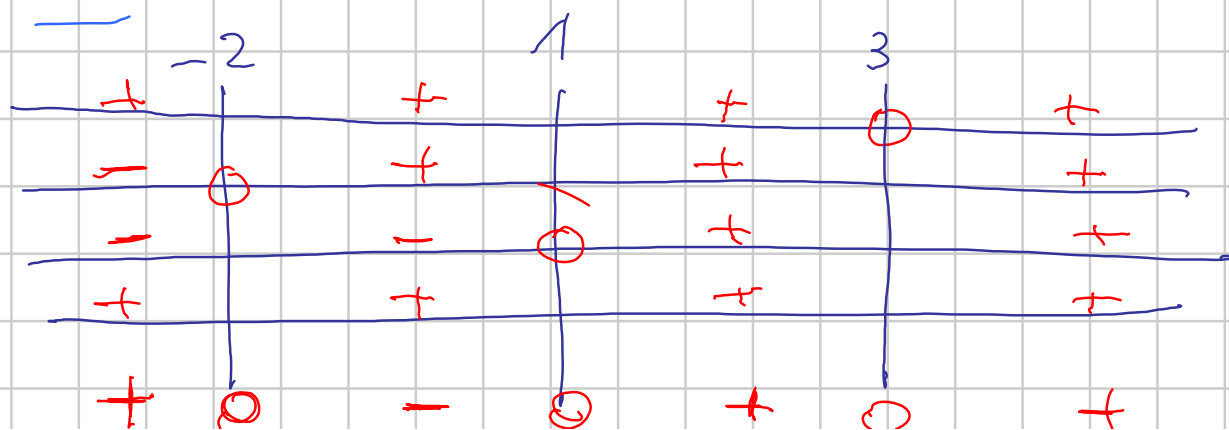
ricordare che

$$(x-x_0)^{2k+1} \geq 0$$

concorda con $x - x_0$

ricordare le regole del segno
di un prodotto.

Es: $(x-3)^4 \cdot (x+2)^3 \cdot (x-1)^7 \cdot (x^2 - x + 5) \leq 0$



$\Delta < 0$



Soluz: $-2 \leq x \leq 1$ oppure $x = 3$.

Eq. e diseq. razionali:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad (\geq, >, \leq, <)$$

con $f(x)$ e $g(x)$ polinomi (senza radici comuni)

Eq: $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ stessa soluz. di $f(x) = 0$
escludendo le soluz. di $g(x) = 0$

Disep: $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ stessa soluz. di $f(x) \cdot g(x) \geq 0$
escludendo le soluz. di $g(x) = 0$

Eq. e Disep. con valore assoluto:

$$|f(x)| = g(x) \quad \text{equivale a}$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

Ese 1: disporre in ordine crescente

$$(b) \quad -\frac{11}{8}, -\frac{8}{3}, -\frac{7}{2}, -\frac{3}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{7}{9}$$

Ricardo: $-a < -b \iff b < a$

$$-\frac{8}{3} < -\frac{7}{3} < -\frac{7}{9} < -\frac{4}{7} < -\frac{2}{7} < -\frac{2}{9}$$

Red arrows point to the inequalities: $-\frac{8}{3} < -\frac{7}{3}$, $-\frac{7}{3} < -\frac{7}{9}$, $-\frac{4}{7} < -\frac{2}{7}$, and $-\frac{2}{7} < -\frac{2}{9}$.

$$\frac{7}{9} > \frac{4}{7}$$

$$49 > 36$$

ver

$$\begin{array}{ccccccc}
 (R) & \sqrt{\frac{2}{13}} & , & \left| \frac{3}{23} - \frac{2}{11} \right| & , & \sqrt[3]{-\frac{1}{7}} & , & - \left| \frac{2}{9} - \frac{3}{7} \right| \\
 & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 & pos & & pos & & neg & & neg
 \end{array}$$

$$\underbrace{\sqrt[3]{-\frac{1}{7}} < - \left| \frac{2}{9} - \frac{3}{7} \right|}_{\text{true}} < \underbrace{\left| \frac{3}{23} - \frac{2}{11} \right| < \sqrt{\frac{2}{13}}}_{\text{true}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{7}} > \left| \frac{14 - 27}{9 \cdot 7} \right| \quad \Leftrightarrow \left| \frac{33 - 46}{23 \cdot 11} \right| < \sqrt{\frac{2}{13}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{7}} > \frac{13}{9 \cdot 7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{7} > \frac{13^3}{9^3 \cdot 7^3}$$

$$\Leftrightarrow 9^3 \cdot 7^2 > 13^3$$

$$\Leftrightarrow 729 \cdot 49 > 169 \cdot 13$$

VERD

$$\Leftrightarrow \frac{13}{23 \cdot 11} < \sqrt{\frac{2}{13}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{13^2}{23^2 \cdot 11^2} < \frac{2}{13}$$

$$\Leftrightarrow 13^3 < 2 \cdot 23^2 \cdot 11^2$$

$$\Leftrightarrow 13 \cdot 13^2 < 11 \cdot 22 \cdot 23^2$$

VERD

② Scrivere come singola potenza

$$(b) \quad \frac{8^3 \cdot 2^{-5}}{16^{-6} \cdot (4^7)^2}$$

$$\frac{(2^3)^3 \cdot 2^{-5}}{(2^4)^{-6} \cdot ((2^2)^7)^2} = \frac{2^9 \cdot 2^{-5}}{2^{-24} \cdot 2^{28}} = \frac{2^4}{2^4} = 1 = 2^0$$

③ Spiegare perché $x \in \mathbb{Q}$ ha espressione decimale periodica.

Esempio: $\frac{17}{11}$

17.	11
11	
60	1.54545454
55	
50	
44	

$= 1.\overline{54}$

$$\begin{array}{r}
 60 \\
 55 \\
 \hline
 50 \\
 44 \\
 \hline
 6
 \end{array}$$

④ Esegui le conversioni e scrivi in not. sc.

(a) $31.4 \cdot 10^{-4} \text{ hg} = ? \text{ } \mu\text{g}$

$$3.14 \cdot 10^1 \cdot 10^{-4} \frac{h}{\mu} \cdot \mu g$$

$$3.14 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{10^2}{10^{-6}} \mu g$$

$$3.14 \cdot 10^{-3} \cdot 10^8 \mu g$$

$$3.14 \cdot 10^5 \mu g$$

$$(d) \quad 0.189 \text{ cm}^2 = ? \text{ km}^2$$

$$1.89 \cdot 10^{-1} (\text{cm})^2$$

$$1.89 \cdot 10^{-1} \cdot \frac{\text{cm}^2}{\text{km}^2} \cdot (\text{km})^2$$

$$1.89 \cdot 10^{-1} \cdot \frac{(10^{-2})^2}{(10^3)^2} \cdot \text{km}^2$$

$$1.89 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-6} \text{ km}^2 = 1.89 \cdot 10^{-11} \text{ km}^2$$

⑤ Nota ε_x o Δx calcolare l'altro e disporre in ordine di accuratezza

$$x = 88.5 \quad \Delta x = 0.21 \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x} = 2.35 \cdot 10^{-3} \quad \textcircled{1}$$

$$x = 28.1 \quad \varepsilon_x = 0.037 \quad \Delta x = x \cdot \varepsilon_x = 1.04 \quad \textcircled{4}$$

$$x = -81.47 \quad \Delta x = 0.56 \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta x}{|x|} = 6.87 \cdot 10^{-3} \quad \textcircled{2}$$

$$x = -92.5 \quad \varepsilon_x = 0.015 \quad \Delta x = |x| \cdot \varepsilon_x = 1.39 \quad \textcircled{3}$$

(8) $89 \text{ kg} \rightarrow 82 \text{ kg}$; calc percentage }

$$-\frac{7}{89} \cdot 100 \% = -8.64 \%$$

(10) $24.5 \text{ dl} \text{ alcohol} + 48.7 \cdot 10^2 \text{ cm}^3 \text{ aque}$
 $= \text{soln. \& powder. ? \%}$

$$24.5 \text{ dl} = 2.45 \text{ l}$$

$$\begin{aligned} 48.7 \cdot 10^2 \text{ cm}^3 &= 48.7 \cdot 10^2 \left(\frac{\text{cm}}{\text{dm}} \right)^3 (\text{dm})^3 \\ &= 4.87 \cdot 10 \cdot 10^2 \cdot \left(\frac{10^{-2}}{10^{-1}} \right)^3 \cdot \text{l} \\ &= 4.87 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} \text{ l} \\ &= 4.87 \text{ l} \end{aligned}$$

gradazione:

$$\frac{2.45 \text{ l}}{2.45 \text{ l} + 4.87 \text{ l}}$$

$$= \frac{2.45}{7.32} = 0.3347 = 33.47\%$$