

Matematica e statistica 11/12/18

Ultimo recapito: ~~13/12~~ 17/12 ore Betoli
Ultima lezione: ~~18/12~~

Scommesse su un fatto con probabilità p e
quasi se il banco paga $\frac{1}{p}$ con $1 = \text{puntata}$
(coprire restituzione puntata).

Es. 1: "Carne" = puntare su 4 numeri (escluso 0).

Se vinco il banco pago 9 volte (Wiki: $8 + 1 = 9$).

Per essere equo dovrebbe pagare $\frac{1}{4}$ con $p = \frac{4}{37}$

cioè $\frac{1}{p} = \frac{37}{4} = 9.25$ volte.

Quasi equo: pago 9 invece che 9.25 cioè 97.3%.

Es 2: lotto. Per il terzo il banco paga 4500 volte.

Dovrebbe pagare $\frac{1}{P}$ con

$$P = \frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} \leftarrow \begin{array}{l} \text{le estrazioni che contengono} \\ \text{il mio terzo} \end{array} \quad \xrightarrow{\hspace{10em}} \quad = \frac{1}{11748}$$

$\leftarrow$ tutte le possibili estrazioni di 5 numeri su 90

Dovrebbe pagare 11748 volte; invece paga 4500
con il 38.3 %.

— ○ —

Errore tipico dei numeri ritardatari.

Poiché la prob $\frac{1}{80}$ nelle prossime 90
uscite uscirà circa 1 volta (non tanto)
(meglio: nelle prossime 80.000 uscite ^{vero} circa 1000).

Se non è uscito nelle ultime 899 : nelle

prossime le sergno $p = \frac{1}{90}$.

————— 0 —————

Es: Se estraggo numero tra 0 e 9, $p(7) = \frac{1}{10}$
" " " " 0 e 99, $p(7) = \frac{1}{100}$
" " " " 0 e 999, $p(7) = \frac{1}{1000}$
se estraggo un numero a caso $p(7) = 0$

Ω = insieme degli eventi elementari (infinito)

$\mathcal{A}$ = l'insieme degli eventi ammissibili
(alberi sottoinsiemi di Ω)

$p: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ probabilità con .

• $\Omega \in \mathcal{A}, \quad p(\Omega) = 1$

• $E \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus E \in \mathcal{A}$

$$p(\Omega \setminus E) = 1 - p(E)$$

$$\bullet E, F \in \mathcal{A} \Rightarrow E \cup F, E \cap F \in \mathcal{A}$$

$$p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F)$$

Es: estrazione di un numero naturale a caso.

E = estrazione di un multiplo di 6

F = estrazione di un multiplo di 7

$E \cup F$ estrazione di multiplo di 6 o di 7

$E \cap F$ estrazione di un multiplo di 42

$$p(E) = \frac{1}{6} \quad p(F) = \frac{1}{7} \quad p(E \cap F) = \frac{1}{42}$$

$$p(E \cup F) = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{42}$$

Probabilità condizionata.

$$p(E|F) = \text{"probabilità dell'evento } E \text{ condizionata da } F \text{"}$$

= probabilità che E si realizzi
sapendo che si è realizzato F

Fatto:
$$p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}$$

ho diviso per $p(F)$ dato che ormai
 F è diventato certo

Es: estraggo 3 carte da un mazzo da 40

E = estraggo il re di coppe

F = estraggo la regina di bastoni.

$p(E|F)$ = probabilità di estrarre il re di coppe
pescando 2 carte delle 38
(40 tolta la regina di bastoni)

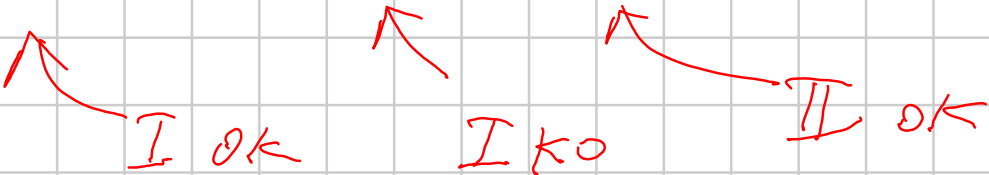
$$= \frac{38}{\binom{38}{2}} \quad \leftarrow \text{quelle con re di coppe}$$

$$\quad \leftarrow \text{tutte le estrazioni di 2 su 38}$$

$$= \frac{38}{39 \cdot 38} = \frac{2}{39}$$

2 · 1

$$= \frac{1}{39} + \frac{38}{39} \cdot \frac{1}{38} = \frac{2}{39}$$


I OK
I KO
II OK

$\gamma(E \cap F) =$ estrarre su 3 dis su coppe sic ripieno bon Poi

$$= \frac{38}{\binom{40}{3}} = \frac{38}{\frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{6}{40 \cdot 39}$$

$$= \frac{2}{40} \cdot \frac{1}{39} + \frac{2}{40} \cdot \frac{38}{39} \cdot \frac{1}{38} + \frac{38}{40} \cdot \frac{2}{39} \cdot \frac{1}{38}$$

$$P(F) = \frac{\binom{39}{2}}{\binom{40}{3}} = \frac{\frac{39 \cdot 38}{2}}{\frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{3}{40}$$

$$= \frac{1}{40} + \frac{39}{40} \cdot \frac{1}{39} + \frac{39}{40} \cdot \frac{38}{39} \cdot \frac{1}{38}$$

Verifikation

$$p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}$$

$\frac{2}{39}$ $\frac{6}{40 \cdot 39}$ $\frac{3}{40}$ $\frac{0.5}{1}$

Oss: in qualche caso è più facile
calcolare $p(E|F)$ che $p(E \cap F)$
dunque si usa $p(E \cap F) = p(F) \cdot p(E|F)$.

E.s: Pesca 2 carte su 40:

$$\begin{aligned} p(\text{entrambe denari}) &= p((\text{prima denari}) \cap (\text{seconda denari})) \\ &= p(\text{prima denari}) \cdot p(\text{seconda denari} | \text{prima denari}) \end{aligned}$$

$$= \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{33}$$

Controllo:

$$\frac{\binom{10}{2}}{\binom{40}{2}} = \frac{\frac{10 \cdot 9}{2}}{\frac{40 \cdot 39}{2}} = \frac{10 \cdot 9}{40 \cdot 39}$$

Bayes:
$$p(F|E) = \frac{p(F \cap E)}{p(E)} = \frac{p(F \cap E)}{p(F \cap E) + p((\Omega \setminus F) \cap E)}$$

ES: test diagnostico su malattia rara -

Malattia che colpisce in media 1 persona o caso su 90000.

M = malattia

$$p(M) = \frac{1}{90000}$$

S = sano

$$p(S) = \frac{89999}{90000}$$

Test diagnostico affidabile al 99% sui malati e al 98 sui sani -

P = test positivo : $p(P|M) = \frac{99}{100}$; $p(N|M) = \frac{1}{100}$
 N = test negativo : $p(N|S) = \frac{98}{100}$; $p(P|S) = \frac{2}{100}$.

$$p(M|P) = \frac{p(M \cap P)}{p(P)} = \frac{p(P \cap M)}{p(P \cap M) + p(P \cap S)}$$

$$= \frac{p(P|M) \cdot p(M)}{p(P|M) \cdot p(M) + p(P|S) \cdot p(S)} =$$

$$= \frac{\frac{99}{100} \cdot \frac{1}{90000}}{\frac{99}{100} \cdot \frac{1}{90000} + \frac{2}{100} \cdot \frac{89999}{90000}} = \frac{99}{99 + 2 \cdot 89999} \approx 0.05\%$$

Perché risultato positivo fa tenere poco
di essere malati?

Città con 900.000 abitanti; test a tutti;

malati 10
Sani 900'000

positivi malati : 10
Sani : 18000

Se positivo: molto facile falso -
————— 0 —————

Distribuzioni di probabilità.

Ω insieme eventi elementari (finito)

p probabilità su eventi

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Chiamo X variabile aleatoria

(Ω, p, X) distrib. di prob.

ES: ho in tasca 17 monete, 11 da 2€
6 da 1€.

Ne pesca due a caso; Ω = possibili uscite.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} \{2 \in, 2 \in\} \\ \{2 \in, 1 \in\} \\ \{1 \in, 1 \in\} \end{array} \right\}$$

$X(\omega)$ = cifre estratte

4

3

2

Chiamo valore medio atteso di X :

$$\mu(X) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \cdot X(\omega)$$

Es: $p(\{2 \in, 2 \in\}) = \frac{11}{17} \cdot \frac{10}{16}$

$$p(\{2 \in, 1 \in\}) = \frac{11}{17} \cdot \frac{6}{16} + \frac{6}{17} \cdot \frac{11}{16} = 2 \cdot \frac{6 \cdot 11}{17 \cdot 16}$$

$$p(\{1 \in, 1 \in\}) = \frac{6}{17} \cdot \frac{5}{16}$$

$$\mu(X) = \frac{11 \cdot 10}{17 \cdot 16} \cdot 4 + \frac{2 \cdot 6 \cdot 11}{17 \cdot 16} \cdot 3 + \frac{6 \cdot 5}{17 \cdot 16} \cdot 2 = \frac{56}{17}$$

Oss: $\frac{2 \cdot 11 + 1 \cdot 6}{17} = \frac{28}{17}$ volon medio delle monete.

volon medio ottenuto da $= 2 \cdot \frac{28}{17} = \frac{56}{17}$.

Varianza: $\mu(X^2) - \mu(X)^2 = \sigma^2(X)$

$$\underline{Es}: \mu(X^2) = \frac{11 \cdot 10}{17 \cdot 16} \cdot 16 + \frac{2 \cdot 6 \cdot 11}{17 \cdot 16} \cdot 9 + \frac{6 \cdot 5}{17 \cdot 16} \cdot 4 = \frac{767}{68}$$

$$\Rightarrow \sigma^2(X) = \frac{767}{68} - \left(\frac{56}{17}\right)^2 \approx 0.428$$

Si può calcolare:

$$p(a \leq X \leq b) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ a \leq X(\omega) \leq b}} p(\omega)$$

$$p(X \geq a) = \dots \quad p(X = a) = \dots$$

————— 0 —————

Distrib. Bernoulli: faccio esperimento che può avere successo o fallire.

$$p(\text{successo}) = u$$

$$p(\text{fallimento}) = 1 - u$$

$$X(\text{successo}) = 1$$

$$X(\text{fallimento}) = 0$$

$$\mu(X) = u$$

$$\sigma^2(X) = u(1-u).$$

Distrib. binomiale

Fisso n e ripeto n volte l'esperimento di sopra.

X = numero di successi.

$$P(k \text{ successi}) = P(X = k)$$

$$= \binom{n}{k} \cdot u^k \cdot (1-u)^{n-k}$$

possibili
collocazioni dei
K successi sulle
n ripetizioni

prob. di
successo
in quelle
collocazioni

prob. di
fallimento
nelle altre
collocazioni

Es: centro bersaglio con $p = \frac{2}{3}$;

prob. di 6 centri su 10 = $\binom{10}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{3}\right)^4$.