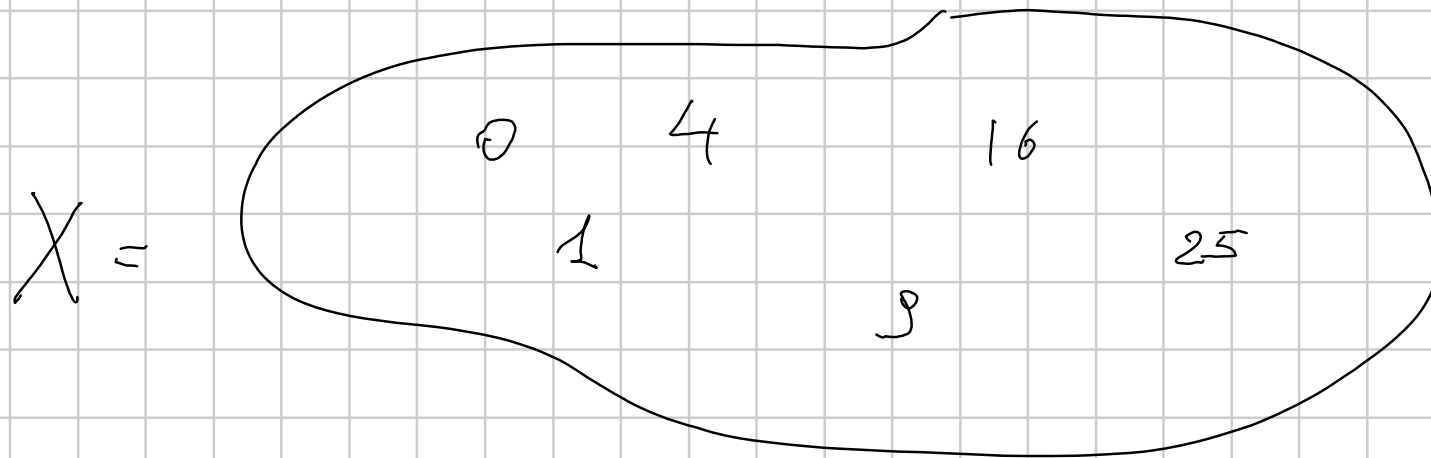


Mat / Stat 7/11/18

Insiemi e funzioni

Insieme = collezione di oggetti. Definizioni:

- elencazione : $X = \{ 0, 1, 4, 9, 16, 25 \}$
- diagramme :



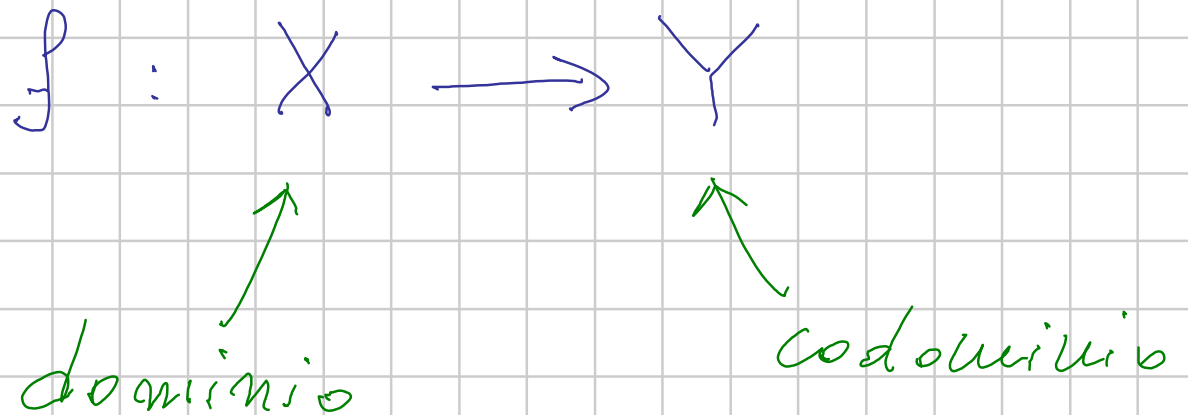
- proprietà che haizzante come sottoinsieme di un altro insieme:

$$X = \{ m \in \mathbb{N} : m \leq 30, m \text{ \u00e9 quadrado perfeito} \}$$

- usando um par\u00e2metro:

$$\begin{aligned} X &= \{ k^2 : k \in \mathbb{N}, k \leq 5 \} \\ &= \{ k^2 : k = 0, \dots, 5 \} \end{aligned}$$

Funzioni



f è legge che associe a ogni elemento x del dominio un preciso elemento del codominio $f(x)$; scrivo $f : x \mapsto f(x)$.

Fatto: X, Y sono enunziati per dire che è f .

Dunque se scrivo $f(x) = x^2$ non ho ben specificato
una funzione. Potrei avere

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

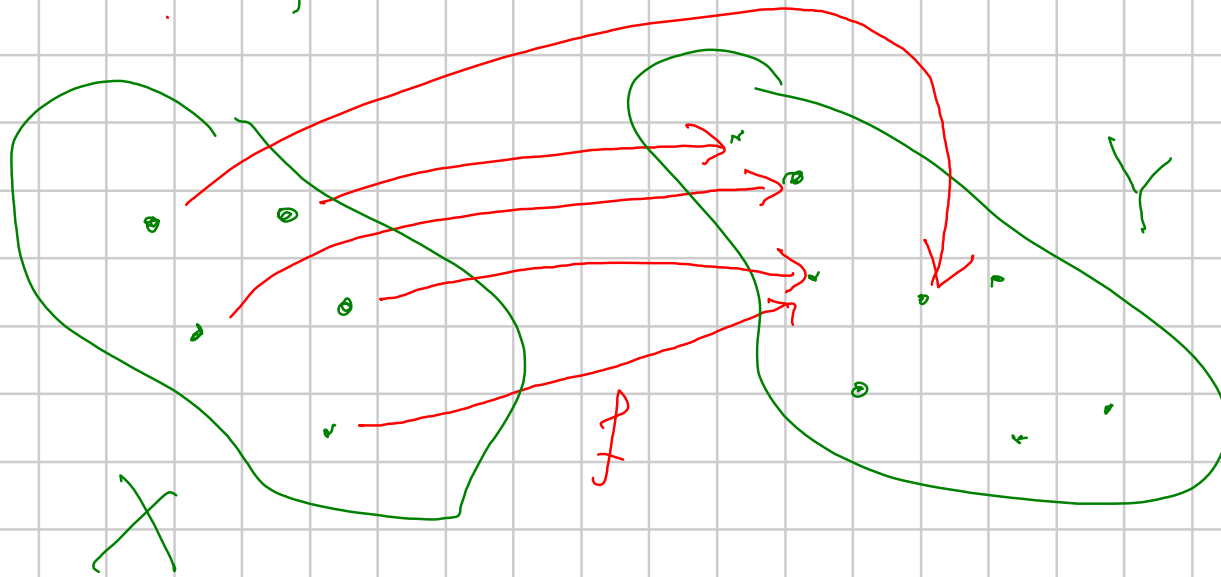
$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

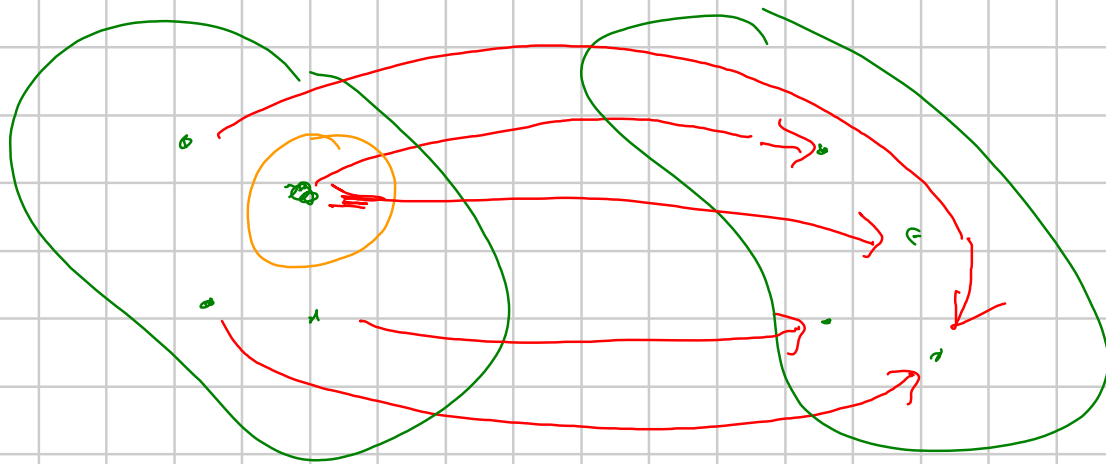
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

...

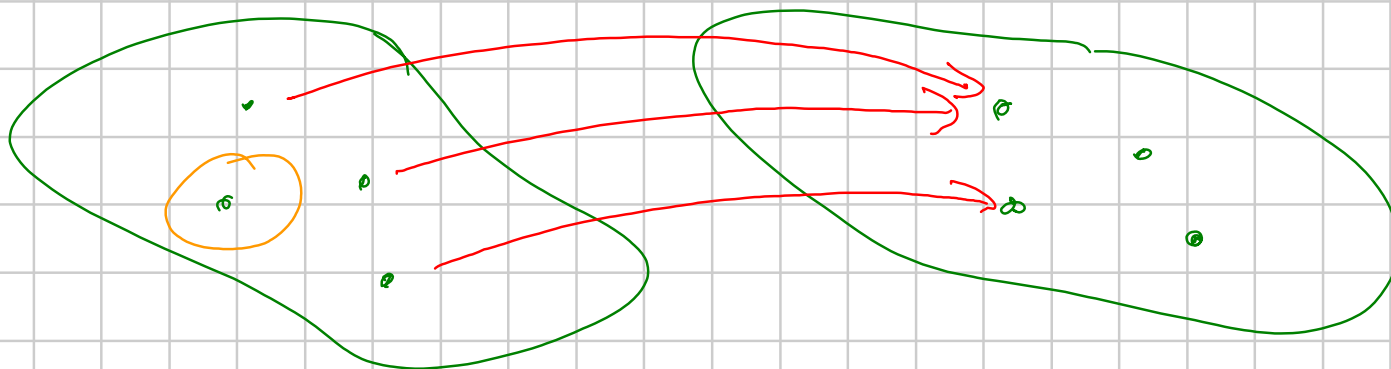
-

Su diagrammi una funzione f si può configurare
tramite frecce:





NO func



NO func.

$\mathbb{R}$	(a, b)	$[a, b)$	$(a, b]$	$[a, b]$
	$(-\infty, a)$	$(-\infty, a]$	$(a, +\infty)$	$[a, +\infty)$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

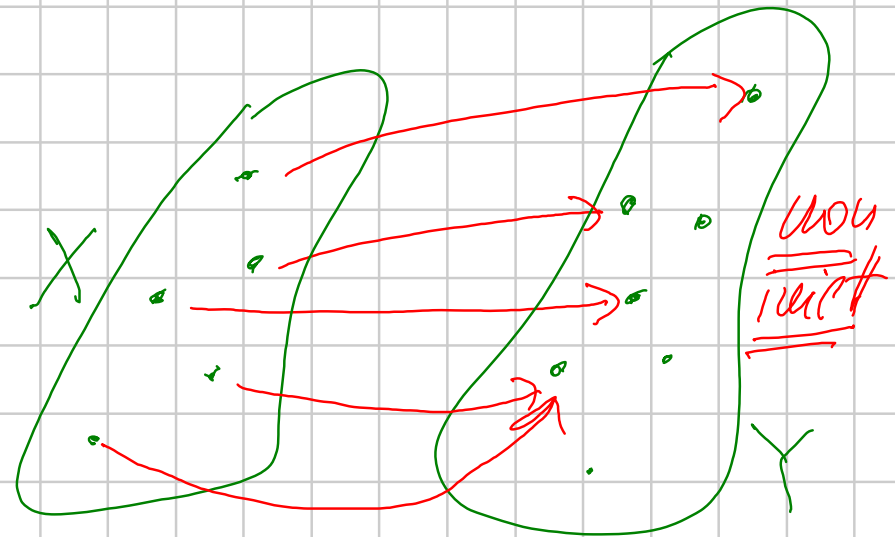
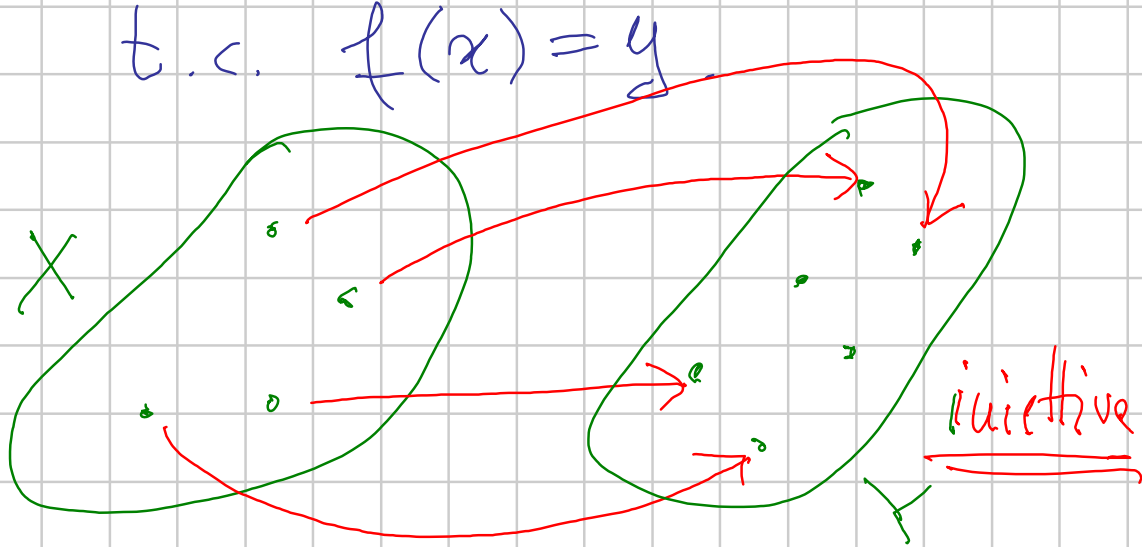
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

Def: una funzione $f: X \rightarrow Y$ è iniettiva se:

- elementi distinti di X vengono mandati da f in elementi distinti di Y ; cioè

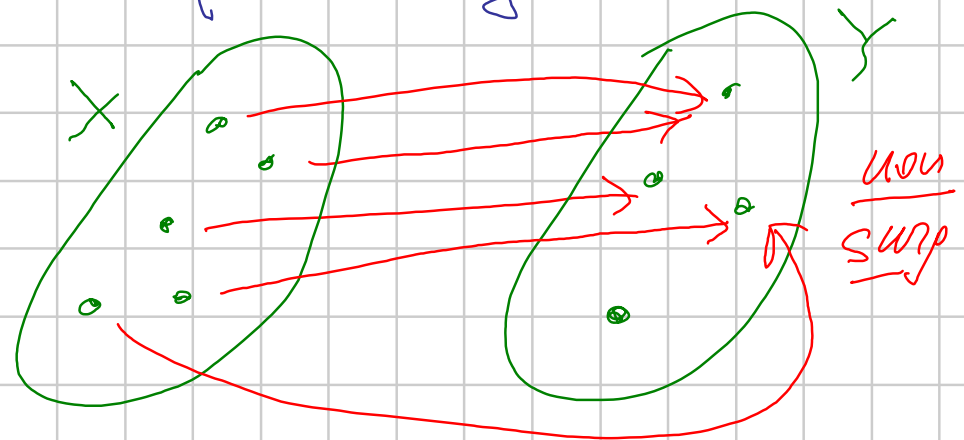
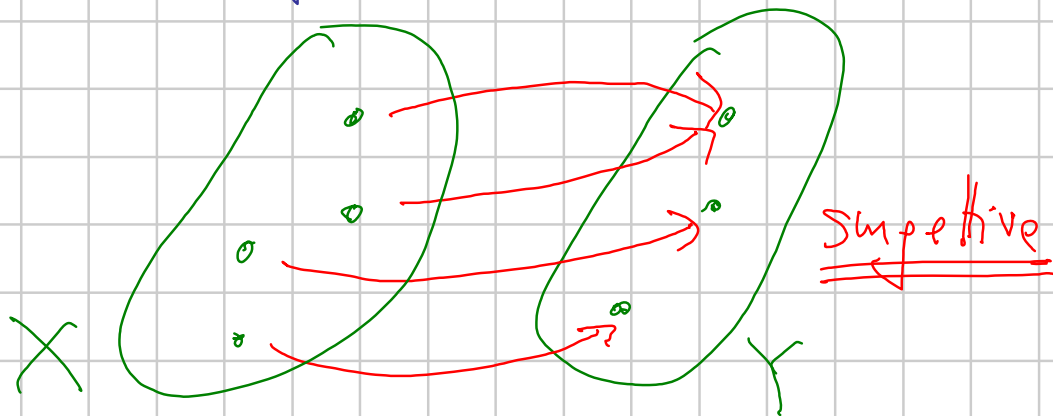
- dati $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$,
cioè;
- dati $x_1, x_2 \in X$ t.c. $f(x_1) = f(x_2)$ si ha $x_1 = x_2$, cioè
- per ogni $y \in Y$ esiste al più un solo $x \in X$
t.c. $f(x) = y$



Def: $f: X \rightarrow Y$ è surgettiva se

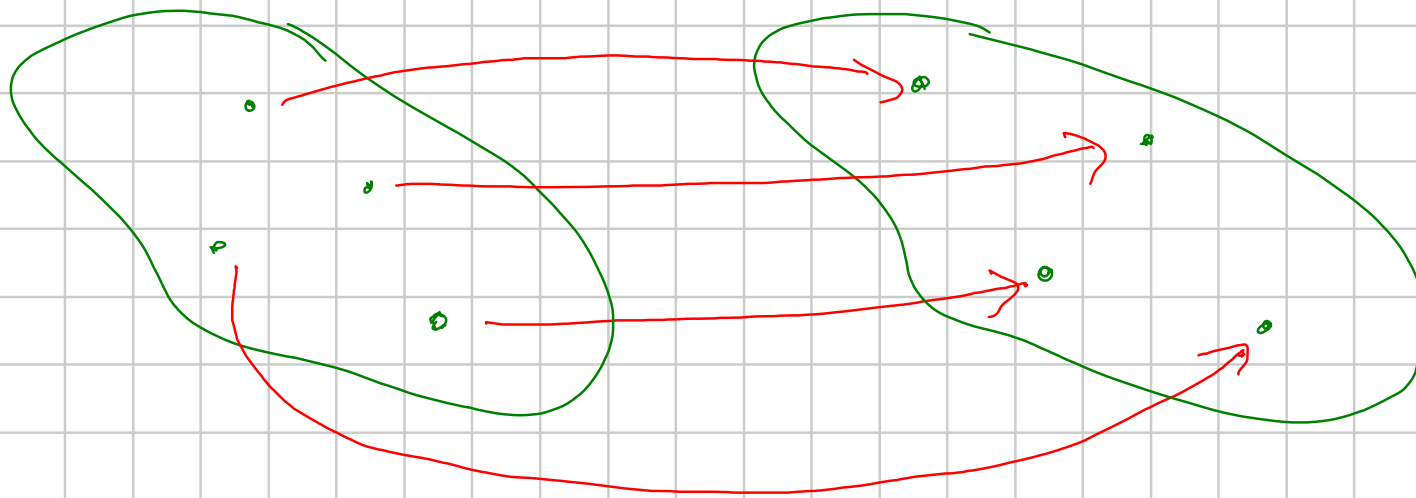
- ogni elemento del codominio è immagine di qualche elemento del dominio (uno o più di uno), cioè:

$$\exists y \in Y \quad \exists x \in X \quad \text{t.c.} \quad f(x) = y$$



Def: $f: X \rightarrow Y$ bijective se $\bar{e}$ injectiva e surjetiva, cioè:

$\forall y \in Y \quad \exists \text{ unico } x \in X \quad \text{t.c.} \quad f(x) = y.$



Osserviamo che $f(x) = x^2$ ha proprietà diverse
a seconda di dominio e codominio che scegliamo;
ad es:

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

- iniettiva: NO $f(2) = f(-2) = 4$

- surgettiva: $-4 \notin \text{Im}(f)$

$$\begin{array}{l} \text{Def: } \text{Im}(f) \\ \text{"immagine di } f" \\ = \{f(x) : x \in X\} \end{array}$$

f surgettiva:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$

$$f(x) = x^2$$

- Injective: No: $f(2) = f(-2)$

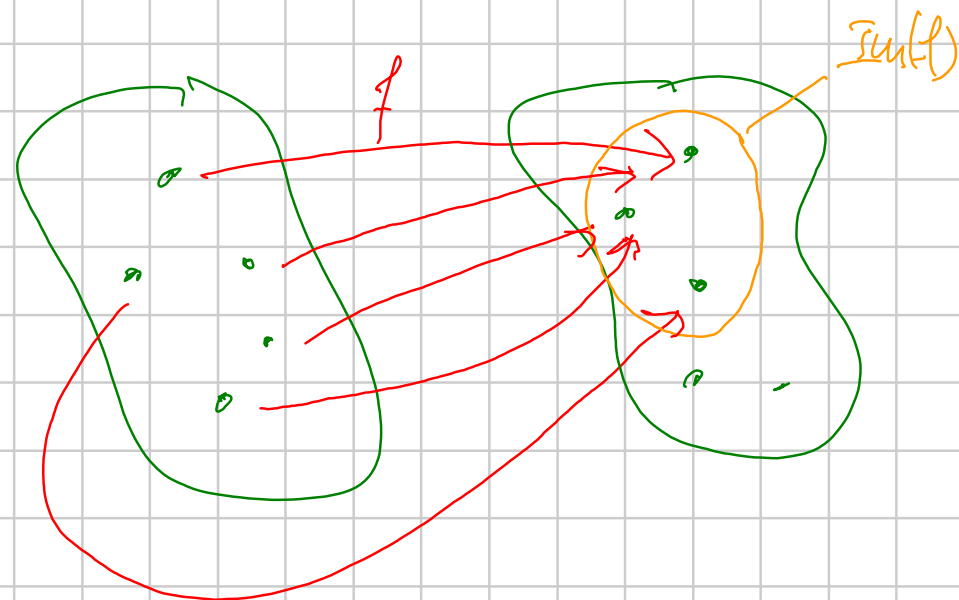
- Surjective: si

3) $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2$$

- Injective: si

- Surjective: no, $-4 \notin \text{Im}(f)$



$$4) f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f(x) = x^2$$

- iniettiva: $\mathbb{R}^-$ - surgettiva: $\mathbb{R}^-$

————— 0 —————

$$X \times Y = \{ (x, y) : x \in X, y \in Y \}$$

Def: se ho $f: X \rightarrow Y$ chiamo grafico di f

$$G_f = \{ (x, f(x)) : x \in X \}$$

$$= \{ (x, y) \in X \times Y : y = f(x) \}$$

Esempio: $X = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$

$$Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$f : X \rightarrow Y, \quad f(x) = \text{il resto della divisione}$$

$$(x^2 + 1) : 5$$

4	*	*	*	*	*	*	*	*
3	*	*	*	*	*	*	*	*
2	*	*	*	*	*	*	*	*
1	*	*	*	*	*	*	*	*
0	*	*	*	*	*	*	*	*
	0	1	2	3	4	5	6	7

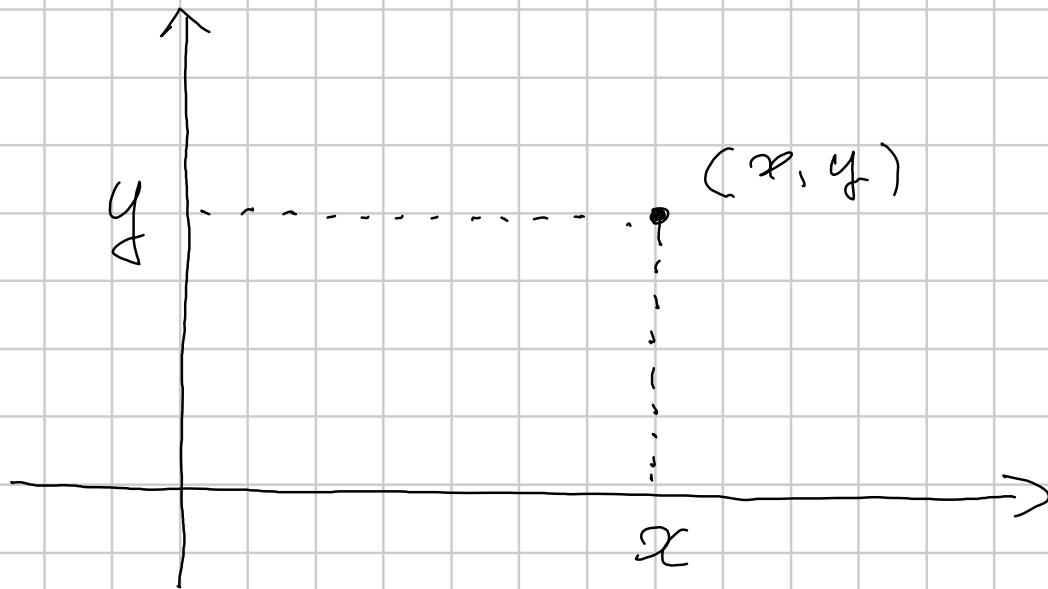
Gp

Ricordo: la divisione tra
 interi $m : n$ ha quoziente q
 e resto r se : $m = n \cdot q + r$
 e $0 \leq r < n$
 ($m = \text{dividendo}$, $n = \text{divisore}$)

$19 : 5$ quoziente 3 resto 4
 $19 = 5 \cdot 3 + 4$, $4 < 5$

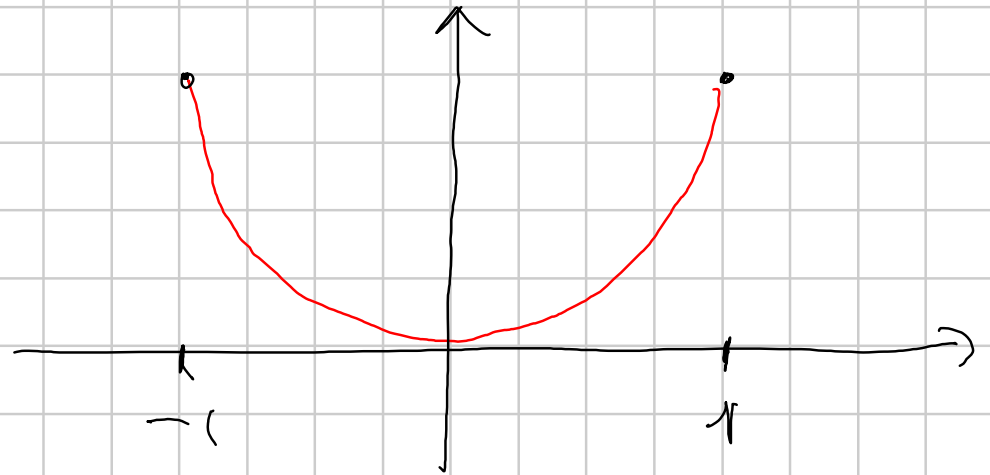
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ è il piano cartesiano:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y) : x, y \in \mathbb{R} \}$$



Di sempre se $I, J \subset \mathbb{R}$ (di solito intervalli/unità $\mathbb{R}/\mathbb{R}$)
e $f: I \rightarrow J$ posso disegnare G_f come sottoinsieme
del piano cartesiano.

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^2$$



$$f: [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$f(x) = x^2$$



Polinomi

monomio nelle indeterminate x e $\bar{e}$

$$a \cdot x^k$$

$$a \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}$$

coefficiente grado

es. $7x^3$, $\sqrt{29} \cdot x^{151}$, $-\sqrt[4]{3} \cdot x^7$...

(x è un oggetto che non appartiene a $\mathbb{R}$)

Scriviamo: $a \cdot x^0 = a$, $a \cdot x^1 = a \cdot x$.

Polinomio: somma finita di monomi.

$$p(x) = 3 - 2x^2 + \sqrt{5}x^7 - \frac{19}{4}x^{207}$$

(Sottinteso: i monomi con coeff. 0
posso scriverli o no).

Se $p(x)$ contiene qualche monomio con coeff. $\neq 0$
chiamo grado di $p(x)$ il grado del
monomio con coeff. $\neq 0$ più alto che compare.

$$p(x) = \sqrt{3} - 11x^4 + \frac{173}{\sqrt{2}}x^9 - 0 \cdot x^{17}$$

grado = 9

Dato polinomio $p(x)$ e $t \in \mathbb{R}$ posso
sostituire in $p(x)$ la x con t e
otengo un numero che chiamo $p(t)$,

valutazione di $p(x)$ in $x=t$.

Es: $p(x) = 3 - 2x^2 + 5x^3$

$$\begin{aligned} p(-2) &= 3 - 2 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2)^3 \\ &= 3 - 2 \cdot 4 + 5 \cdot (-8) \\ &= 3 - 8 - 40 = -45 \end{aligned}$$

"la valutaz. di $p(x)$ in $x=-2$ vale -45 ".

Dunque: dato $p(x)$ polinomio ottruro una funzione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che in ogni $t \in \mathbb{R}$ vale $p(t)$.
La diciamo esse stessa p . Ha senso perché:

PRINCIPIO DI IDENTITÀ DEI POLINOMI:

due polinomi sono uguali (somme degli stessi monomi) se e solo se sono uguali le funzioni loro associate. Cioè:

due polinomi sono uguali



valutati in ogni $p \in \mathbb{R}$ danno lo stesso valore.



Chiamo equazione nell'incognita x una
scrittura $f(x) = g(x)$ dove f, g

Sono funzioni definite su $I \subset \mathbb{R}$
(di solito intervallo/semiretta/ $\mathbb{R}$)

Risolvere l'equazione significa trovare tutti
gli $x \in I$ per i quali l'uguaglianza
 $f(x) = g(x)$ è vera.

Chiamo sistema un'equazione $\begin{cases} f_1(x) = g_1(x) \\ \vdots \\ f_k(x) = g_k(x) \end{cases}$

dove $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_k$ sono def. su I .

Risolvere: trovare tutti gli $x \in I$ che rendono vere tutte le applicazioni.

Due equazioni o sistemi sono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.

Principi di equivalenza per equazioni:

1) Se $k \neq 0$ l'equaz. $f(x) = g(x)$
equivale a $k \cdot f(x) = k \cdot g(x)$

2) Se h è definita su I l'equaz $f(x) = g(x)$
equivale a $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$

3) Due sistemi con le stesse equazioni in
ordine diverso sono equivalenti

$$4) \quad \text{g} \text{ sistemi} \quad \begin{cases} f_1(x) = g_1(x) \\ f_2(x) = g_2(x) \\ \vdots \end{cases}$$

$$\text{e} \quad \begin{cases} f_1(x) = g_1(x) \\ f_2(x) + f_1(x) = g_2(x) + g_1(x) \\ \vdots \end{cases}$$

sono equivalenti.

Oss : oggi epuez. $f(x) = g(x)$ equivale a
una del tipo $h(x) = 0$. Infatti $f(x) = g(x)$
equivale a $f(x) - g(x) = g(x) - g(x)$
o.e. $f(x) - g(x) = 0$
ho chiamato $h(x)$

Chiamo disuguaglianza nelle incognite x una scrittura

$$f(x) < g(x) \quad f(x) \leq g(x) \quad f(x) > g(x) \quad f(x) \geq g(x)$$

dove $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$. Risolvere: trovare tutti gli $x \in I$ che rendono vere le disuguaglianze.

Si possono considerare sistemi di equez. e disuguaglianz. : risolvere: trovare tutti gli $x \in I$

che riguardano le uguaglianze e le disuguaglianze.

Principi di equiv. per disuguaglianze:

$$\begin{array}{lcl} \text{i) Se } k > 0, & f(x) < g(x) & \text{equivale a } k \cdot f(x) < k \cdot g(x) \\ & f(x) \leq g(x) & \text{" " " } k \cdot f(x) \leq k \cdot g(x) \\ & > & > \\ & \geq & \geq \end{array}$$

2) Se $k < 0$ $f(x) < g(x)$ equivale a $k \cdot f(x) > k \cdot g(x)$

$\leq$

$\geq$

$>$

$<$

$\geq$

$\leq$

3) Se h é definida em I

$f(x) < g(x)$ equivale a $f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$ -

Fatto : per risolvere una disuguaglianza conviene
sempre iniziare dalla equazione associata
(sostituire $<, \leq, >, \geq$ con $=$) -

————— 0 —————

Equazioni e diseq. di I grado :

$$a \cdot x + b = 0$$

$$a \neq 0$$

soluzione unica $x = -\frac{b}{a}$

oppure: $a \cdot x = b \quad (a \neq 0)$

soluzione unica $x = \frac{b}{a}$

diseguaglianze:

$a \cdot x < b$ ha soluz:

$\nearrow x < \frac{b}{a} \quad \text{se } a > 0$

$\searrow x > \frac{b}{a} \quad \text{se } a < 0$

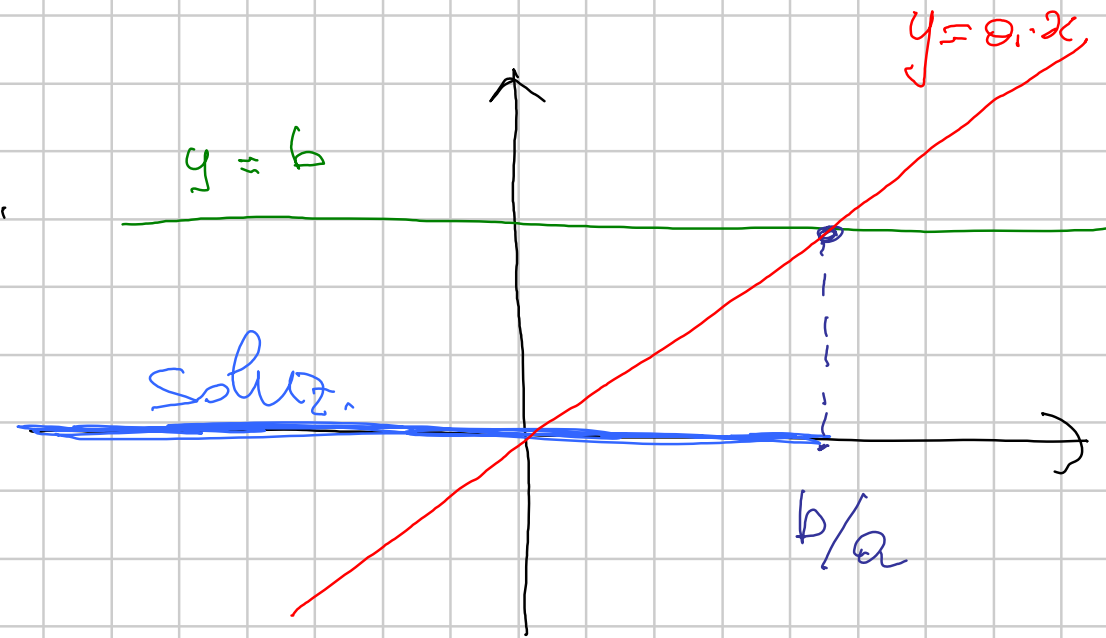
$$a \cdot x > b \quad \dots$$

$$a \cdot x \leq b \quad \dots$$

$$a \cdot x \geq b \quad \dots$$

Interpretazione grafica:

$$a \cdot x < b \quad a > 0$$



le ascisse per le
quale la retta $y = a \cdot x$
sta sotto la retta $y = b$

$$a < 0$$

