

Matematico e statistica 6/11/18

Libro (sto uscendo) + solut ese e
te uni esame
su [www](#) -

Esercizi : provate e fati più !!

Nummeri :

numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

numeri interi (relativi)

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Operazioni $+$, $\cdot$ binarie interne:

Definizione: insieme = collezione di oggetti
se X, Y sono insiemi chiamo funzione una
legge $f: X \rightarrow Y$ che associa a ogni
el. di X un el. di Y .

Es: $X = \text{"noi"}$ $Y = \mathbb{N}$

$f(x) = \text{il numero di scarpe di } x$

es: $f(CP) = 41$ $f(CR) = 44$

Chiamo prodotto cartesiano di X e Y

$$X \times Y = \{ (x, y) : x \in X, y \in Y \}.$$

Es: $X = \{a, b, c\}$ $Y = \{1, 2\}$

$$X \times Y = \left\{ \begin{array}{l} (a, 1), (b, 1), (c, 1) \\ (a, 2), (b, 2), (c, 2) \end{array} \right\} \quad \square$$

Operaz. binarie iterne:

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(m, n) \mapsto m + n$$

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(m, n) \mapsto m \cdot n$$

$$(-4) + 7 = 3$$

$$5 \cdot (-2) = -10$$

$$x \mapsto f(x)$$

↑
esprime quanto
vale la funz.
f sul punto x,

Proprietà:

1. $m + 0 = m \quad \forall m \in \mathbb{Z}$

0 el neutro di +

2. $\forall m \in \mathbb{Z} \exists (-m) \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } m + (-m) = 0$ l'opposto

3. $m + (n + k) = (m + n) + k \quad \forall m, n, k \in \mathbb{Z}$ assoc.

4. $m + n = n + m \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$ commut.

5. $m \cdot 1 = m \quad \forall m$ 1 el. neutro di .

7. $m \cdot (n \cdot k) = (m \cdot n) \cdot k$ assoc.

8. $m \cdot n = n \cdot m$ commutative

9. $m \cdot (n + k) = m \cdot n + m \cdot k$ distributive

numeri razionali $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$



convenendo per o' che

$\frac{m}{n} = \frac{k}{a}$ se $m \cdot a = k \cdot n$.

Fatti: posso identificare $\frac{m}{1}$ a m dunque
vedere $\mathbb{Z}$ come sottoinsieme di $\mathbb{Q}$;
inoltre le operazioni $+$, $\cdot$ si estendono

$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{h} = \frac{mh + kn}{nh}$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{h} = \frac{m \cdot k}{n \cdot h}$$

e continuano a soddisfare le proprietà

di sopra e anche :

$$6. \quad \forall x \in \mathbb{Q}, \quad x \neq 0 \quad \exists x^{-1} \text{ t.c. } x \cdot x^{-1} = 1.$$

esistenza inverso

Relazione d'ordine su $\mathbb{Q}$:

$<$ " minore di "

$$\frac{6}{3} < \frac{13}{4}$$

$$-\frac{4}{7} < \frac{11}{2}$$

$$-\frac{19}{2} < -\frac{4}{17}$$

Ordine totale : dati $x, y \in \mathbb{Q}$ vale una e una
sola delle : $x < y$, $x = y$, $y < x$
($x > y$).

$\leq$ "minore o uguale"

$x \leq y$ vera se $x < y$ oppure $x = y$.

$$\frac{7}{4} \leq \frac{9}{2}$$

vero

$$\frac{14}{8} \leq \frac{21}{12}$$

vero.

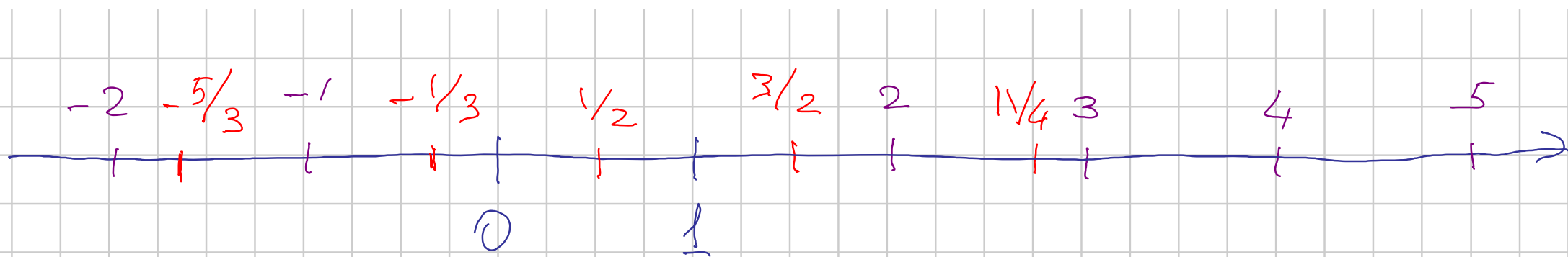
Valore assoluto: $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$

$$\left| \frac{19}{2} \right| = \frac{19}{2}$$

$$\left| -\frac{71}{4} \right| = \frac{71}{4}$$

Visto $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$: ora $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
numeri reali.

Fisso π una retta e su π due punti
distinti che identifichiamo a $0, 1 \in \mathbb{Q}$:
ora posso identificare ogni $x \in \mathbb{Q}$ a
un elemento di π :



Ora chiamo numero reale qualsiasi punto
della retta (Fatto: ce ne sono "moltissimi"
che non sono in $\mathbb{Q}$); $\mathbb{R}$ = insieme dei reali.

Fatto: le operazioni $+$, $\cdot$ si estendono
da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ con le stesse proprietà 1-9.

Quanto anche la relazione $<$ si estende e
valgono le proprietà:

- $x < y$, $y < z \implies x < z$ transitiva
 - $x < y$, $z \in \mathbb{R} \implies x + z < y + z$
 - $x < y$, $z > 0 \implies x \cdot z < y \cdot z$
 - $x < y$, $z < 0 \implies x \cdot z > y \cdot z$
- }
- monotonia

Oss: $x - y = x + (-y)$

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$$

Potenze: $x \in \mathbb{R}, x \neq 0, 1, n \in \mathbb{Z}$

$$x^n = \begin{cases} \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ volte}} & \text{se } n \geq 0 \\ 1 & \text{se } n = 0 \\ x^{-1} \cdot \dots \cdot x^{-1} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

-m volte

Proprietà:

$$x^{m+k} = x^m \cdot x^k$$

$$(x^m)^k = x^{m \cdot k}$$

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

$$(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$$

Notazione posizionale per la scrittura dei reali:

↳ si usano solo le cifre $0, 1, \dots, 9$
il cui valore varia a
seconda della posizione.

Numeri interi : $78451 = 8 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$
 $+ 7 \cdot 10^4$ in base 10.

Numeri decimali finiti :

$$43.175 = 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$$

Numeri decimali periodici :

$$174. \overline{16245} = 174.16425425425425$$

antiperiodo
/ periodo

Somma infinita
di numeri sempre più
piccoli.

Numeri decimali non periodici

π : 3, 14 15

0, 101001000100001000001 . . .

Fatti : $\mathbb{R}$ coincide con l'insieme di tutti
i numeri decimali (finiti, periodici, non periodici)
con queste eccezioni:

$$741.245\overline{9} = 741.246$$

Inoltre: $\mathbb{Q}$ coincide con l'insieme dei
decimoli periodici.

Misure ed errori

Notazione scientifica:

$$\underbrace{-7.149}_{\text{segno}} \cdot \underbrace{10^{-31}}$$

numero decimale
finito compreso
tra 1 e 10
escluso

potenza di 10

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Es:}} \quad 437.19 \cdot 10^4 &= 4.3719 \cdot 10^2 \cdot 10^4 \\ &= 4.3719 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

Unità di misura fondamentali :

m	metro	lunghezza
g	grammo	masse
s	secondo	tempo

Multipli e sottomultipli ottenuti aggiungendo prefissi:

m	=	milli	=	10^{-3}	$(1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s})$
μ	=	micro	=	10^{-6}	

$$m = \text{milli} = 10^{-3}$$

$$c = \text{centi} = 10^{-2}$$

$$d = \text{deci} = 10^{-1}$$

$$da = \text{deca} = 10^1$$

$$h = \text{hecto} = 10^2$$

$$k = \text{kilo} = 10^3$$

$$M = \text{mega} = 10^6$$

$$G = \text{giga} = 10^9$$

Conversione tra unità di misura:

Trucco: considerare il prefisso come un moltiplicatore uguale alla potenza di 10 che rappresenta:

$$0.0412 \text{ mg} = \underbrace{\quad ? \quad}_{\text{in not. sci.}} \text{ kg}$$

$$0.0412 \text{ mg} = 4.12 \cdot 10^{-2} \cdot \text{mg}$$

$$= 4.12 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{h}} \cdot \text{h} \cdot \text{g}$$

$$= 4.12 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{10^{-3}}{10^2} \cdot \text{hg}$$

$$= 4.12 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-5} \text{ hg}$$

$$= 4.12 \cdot 10^{-7} \text{ hg}$$

Area e volume: m^2 , m^3 e loro

multiplici e sottomultiplici con i suoi prefissi.

ATTENZIONE : $\text{cm}^2 = (\text{cm})^2 = \cancel{\text{c}(\text{m}^2)}$

$$\begin{aligned} &= (\text{c} \cdot \text{m})^2 \\ &= (10^{-2} \cdot \text{m})^2 \\ &= 10^{-4} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

Volumi : si usa anche il litro

$$\begin{aligned}
 l &= \text{dm}^3 = (\text{dm})^3 = (d \cdot \text{m})^3 \\
 &= (10^{-1} \cdot \text{m})^3 \\
 &= 10^{-3} \cdot \text{m}^3
 \end{aligned}$$

Errori nelle misure:

$$\underbrace{a}_{\text{valore}} \pm \underbrace{\Delta a}_{\text{errori assoluti}} = \text{lo quantifico misurato si ritiene che valga un numero compreso tra } a - \Delta a \text{ e } a + \Delta a$$

Sai anche $a \pm \Delta a = a (1 \pm \underbrace{\varepsilon_a}_{\text{erroro relativo}})$

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{|a|}$$

$$\Delta a = \varepsilon_a \cdot |a|$$

Fatto: quando si eseguono operazioni con misure approssimate gli errori si propagano con queste regole:

$$\Delta_{a+b} = \Delta_a + \Delta_b$$

$$\varepsilon_{a+b} = \varepsilon_a + \varepsilon_b$$

$$A = a \pm \Delta_a$$

$$\Rightarrow a - \Delta_a < A < a + \Delta_a$$

$$B = b \pm \Delta_b$$

$$\Rightarrow b - \Delta_b < B < b + \Delta_b$$

$$a+b - (\Delta_a + \Delta_b) < A+B < a+b + (\Delta_a + \Delta_b)$$

$$A = a(1 \pm \varepsilon_a)$$

$$B = b(1 \pm \varepsilon_b)$$

$$A \cdot B = a(1 \pm \varepsilon_a) b(1 \pm \varepsilon_b)$$

$$= a \cdot b \left(\underbrace{1 \pm \varepsilon_a \pm \varepsilon_b}_{\pm(\varepsilon_a + \varepsilon_b)} \pm \underbrace{\varepsilon_a \cdot \varepsilon_b}_{\text{molto più piccolo di } \varepsilon_a + \varepsilon_b \text{ se } \varepsilon_a \text{ e } \varepsilon_b \text{ sono piccoli}} \right)$$

$$\pm(\varepsilon_a + \varepsilon_b)$$

molto più piccolo
di $\varepsilon_a + \varepsilon_b$ se
 ε_a e ε_b sono piccoli

$$\Delta_{a-b} = \Delta_a + \Delta_b$$

$$\varepsilon_{a/b} = \varepsilon_a + \varepsilon_b$$

Es ; $x = 7 \pm 0.15$

$$y = 9 \pm 0.21$$

$$z = 4 \pm 0.07$$

$$\frac{x+y}{z} = ?$$

$$\Delta x = 0.15 \quad \Delta y = 0.21 \quad \Rightarrow \quad \Delta_{x+y} = 0.36$$

$$x+y = 16 \pm 0.36 \quad \varepsilon_{x+y} = \frac{0.36}{16} = 0.022$$

$$z = 4 \pm 0.07$$

$$\varepsilon_z = \frac{0.09}{4} = 0.017$$

$$\varepsilon_{\frac{x+y}{z}} = 0.039$$

$$\frac{x+y}{z} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\Delta_{\frac{x+y}{z}} = 4 \cdot 0.039 \hat{=} 0.16$$

Percentuali:

$$x \% \text{ di } y = x \cdot \frac{1}{100} \cdot y$$

Es: 3% della pop. italiana

$$= 3 \cdot \frac{1}{100} \cdot 60 \cdot 10^6 = 18 \cdot 10^5 = 1.8 \cdot 10^6$$

1.8 milioni di persone.