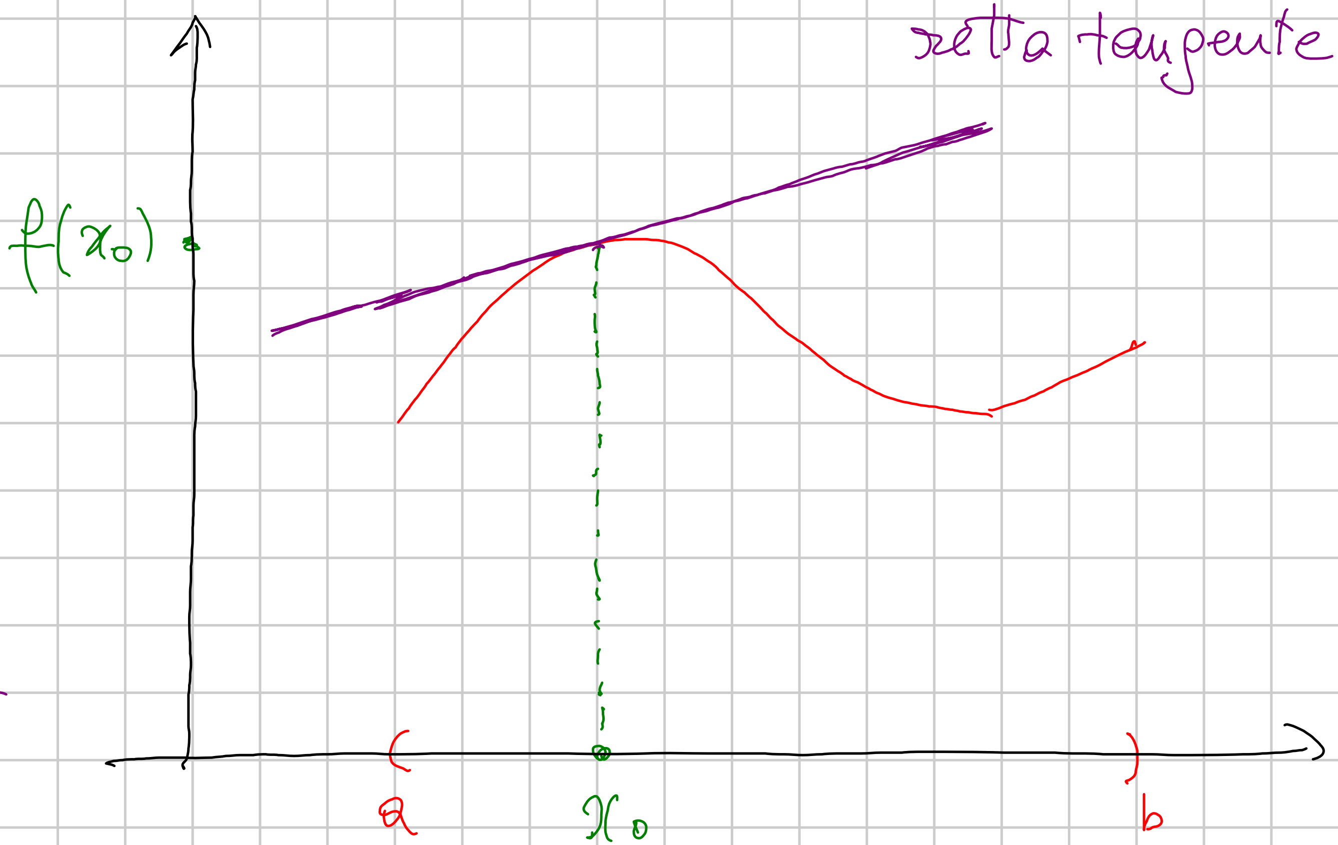
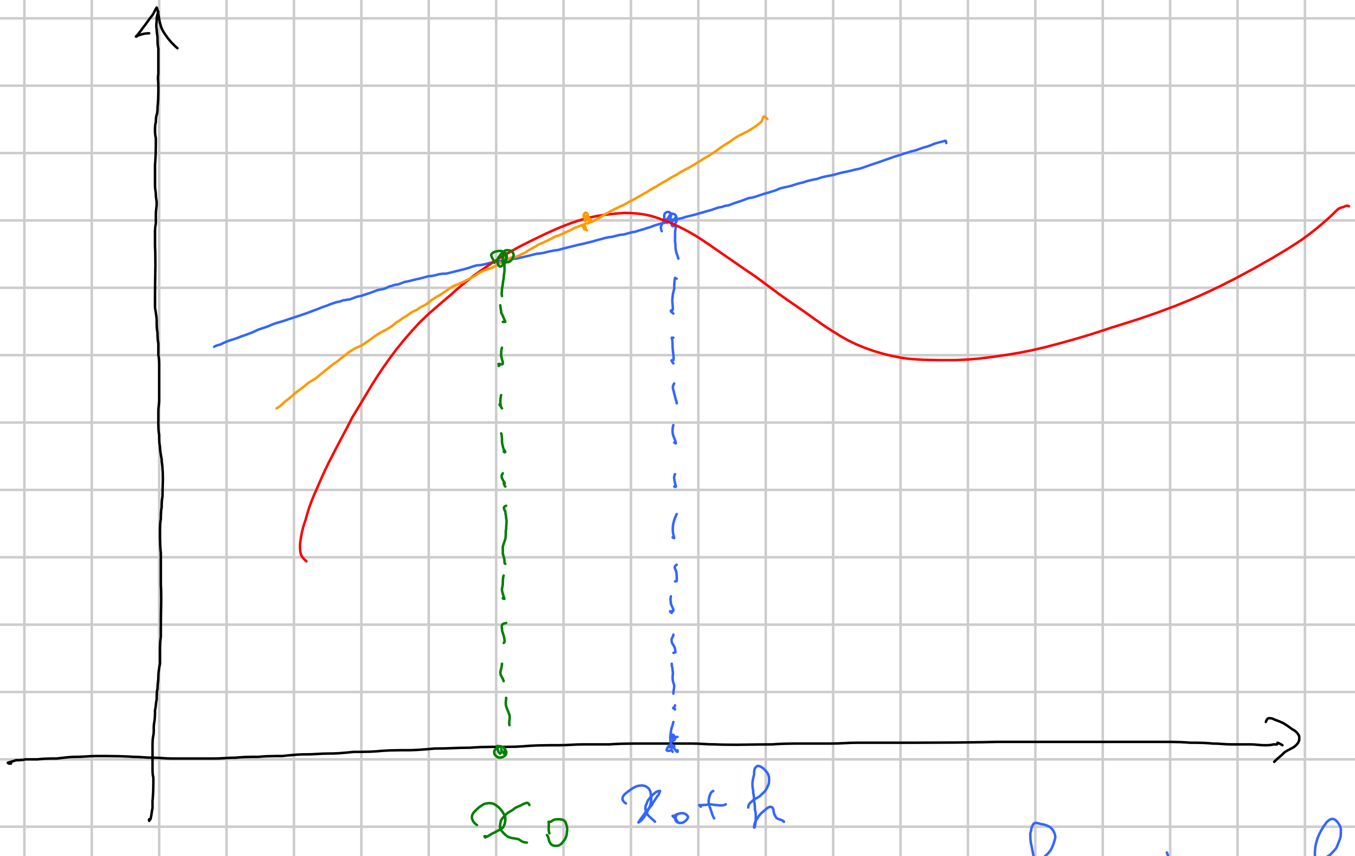
Matematica e statistica 4/12/18

Derivazione

Se riesco a trovare la retta tangente so dire se vicino a x_0 la f cresce oppure decresce (pendenza della tangente).





h piccolo

Idea: per h che tende a 0 la secante nei punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0+h, f(x_0+h))$ tende alla tangente.

Notiamo: la secante ha coeff. ang.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leftarrow \text{rapporto incrementale}$$

<u>Def</u>: se esiste $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ lo chiamo derivata di f in x_0, indicata $f'(x_0)$.

Fatto: se $f'(x_0)$ esiste allora la tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0 è

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Fatto: $f(x) = x^n$ ammette derivata in ogni punto e $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Es: $f(x) = x^3$ $\quad x_0 = 2 \quad f(x_0) = 8$

$f'(x_0) = 3 \cdot 2^2 = 12$. La tangente al grafico nel pto $(2, 8)$ è

$$y = 12(x-2) + 8$$

$$y = 12x - 16.$$

Spiegazione della derivata di x^n:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(x^n + n x^{n-1} h + * \cdot x^{n-2} \cdot h^2 + \dots + n x h^{n-1} + h^n\right) - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(n x^{n-1} + h \left(* x^{n-2} + \dots + n x h^{n-2} + h^{n-1} \right)\right)$$

$= n x^{n-1}$.

Regole di derivazione (non servono per l'esame):

$D =$ "derivata di"

$D(x^\alpha) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1} \quad \forall x > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$D(\sin(x)) = \cos(x) \qquad D(\cos(x)) = -\sin(x)$

$D(e^x) = e^x \qquad D(\ln(x)) = \frac{1}{x}$.

Servono per l'esame:

$$D(f+g) = D(f) + D(g) \quad , \quad D(kf) = k \cdot D(f)$$

Es: $D(3x^7 - 9x^4 + 12x^2 - 3)$

$$= 21x^6 - 36x^3 + 24x .$$

$$D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{D(f) \cdot g - f \cdot D(g)}{g^2}$$

Spiegazione:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)} \cdot \frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)} \cdot \frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x) + f(x)\, g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)}}_{\to \frac{1}{g(x)^2}} \cdot \left(\underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\to f'(x)} \cdot g(x) - f(x) \cdot \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\to g'(x)} \right)$$

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Es: $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 7}{2x^3 + x^2 + 1}$

$$f'(x) = \frac{(6x-1)(2x^3+x^2+1) - (3x^2-x+7)(6x^2+2x)}{(2x^3+x^2+1)^2} = \dots$$

Def: data $f : I \to \mathbb{R}$ (I = intervallo/semiretta/$\mathbb{R}$)

chiamo $x_0 \in I$ punto di:

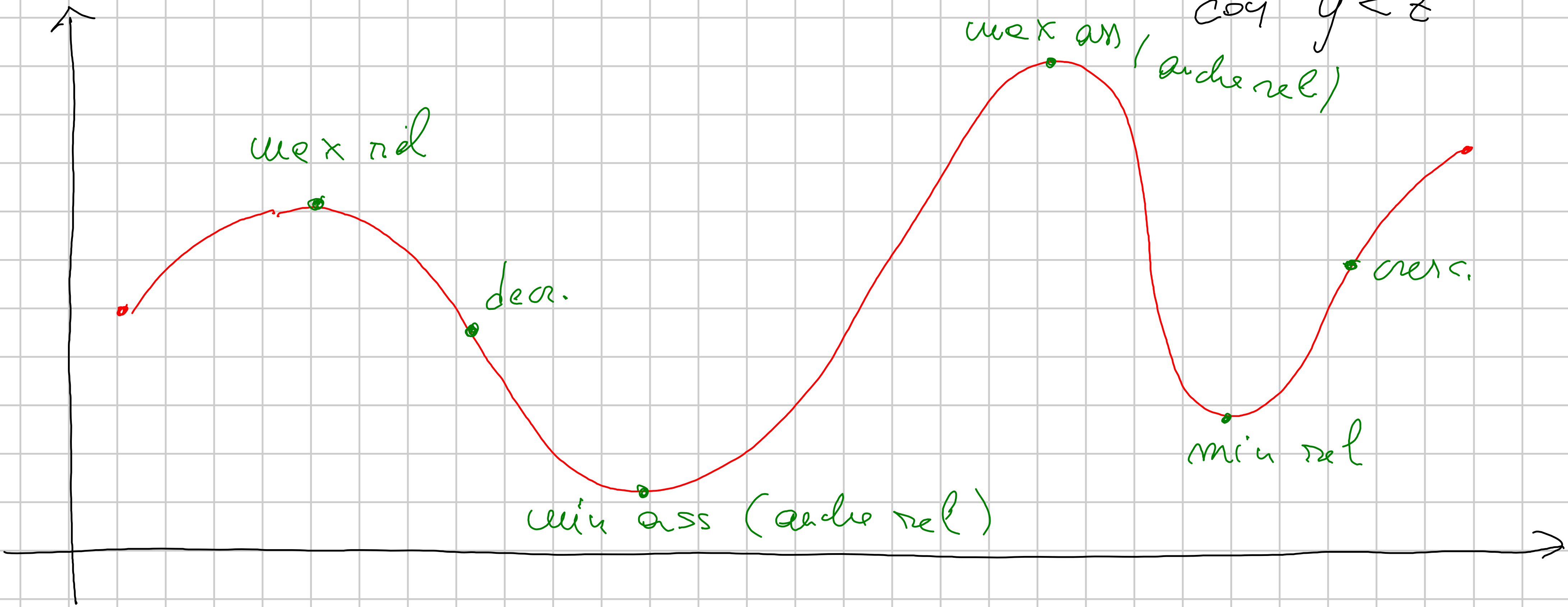
- minimo assoluto se $f(x_0) \leq f(x) \ \forall x \in I$
- massimo assoluto se $f(x_0) \geq f(x) \ \forall x \in I$
- minimo relativo se $f(x_0) \leq f(x)$

  $\forall x$ abbastanza vicino a x_0
- massimo relativo se $f(x_0) \geq f(x)$

  $\forall x$ abbastanza vicino a x_0
- crescente se $f(y) < f(z)$ $\forall y, z$ vicini a x_0

  con $y < z$

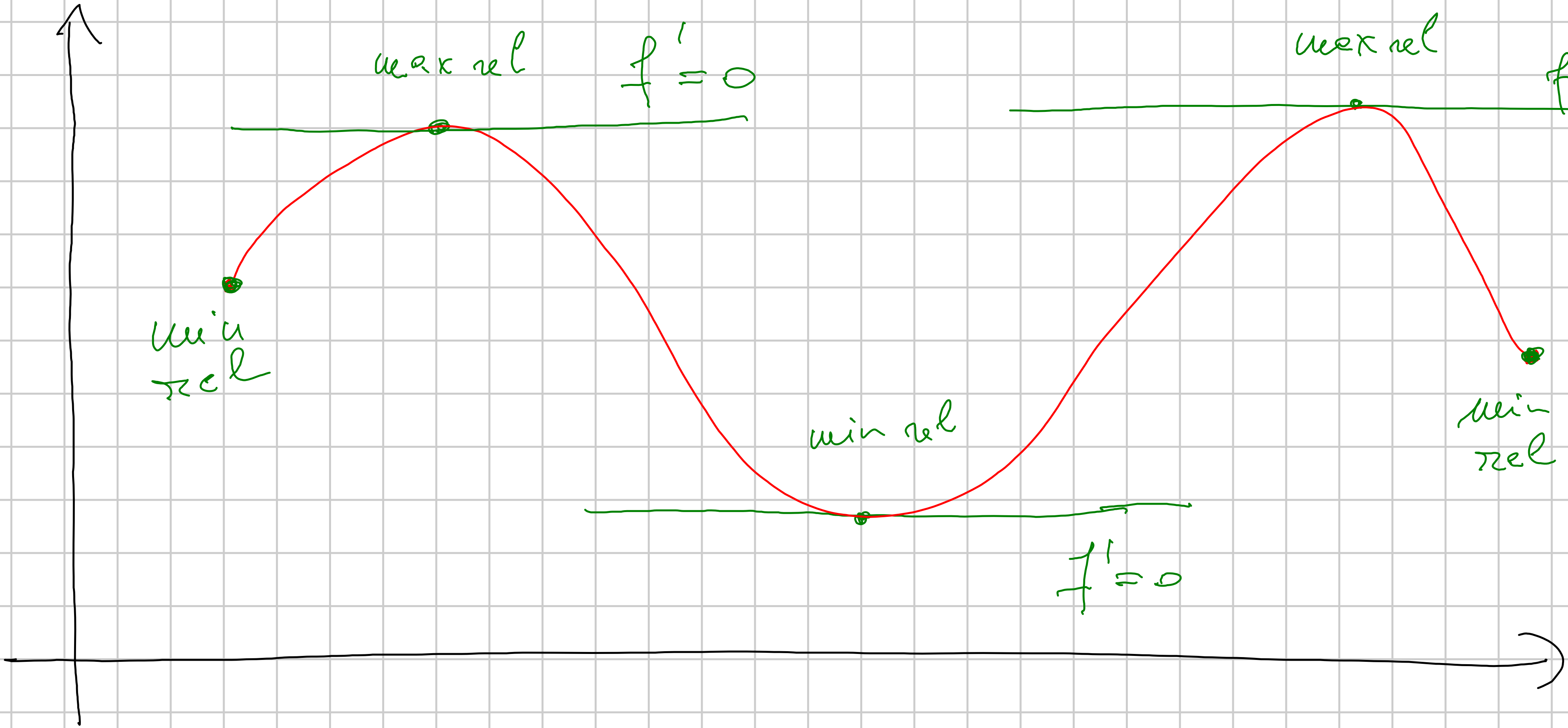
• decrescente se $f(y) > f(z)$ $\forall y,z$ vicini a x_0 con $y < z$



Oss: se $f'(x_0) > 0$ allora x_0 è pto di crescenza
se $f'(x_0) < 0$ allora x_0 è pto di decrescenza

dunque se non è un estremo di I non può essere max/min rel.

$\Rightarrow$ per una funzione derivabile i pti di max/min rel. sono o gli estremi o i pti in cui si annulla la derivata.


max rel
f' = 0
max rel
f' = 0
min rel
min rel
f' = 0
min rel

Statistica elementare

Statistica consiste di:

- popolazione: gli individui su cui eseguo la statistica
- carattere: elemento che rilevo
- modalità: possibili valori del carattere.

3 tipologie di statistica:

Popolazione : noi

1) carattere : numero di scarpe

modalità : $\{28, \dots, 47\} \subset \mathbb{N}$ quantitativa discreta

2) carattere : statura misurata con alta precisione in cm

modalità : $(140, 200) \subset \mathbb{R}$ quantità continua

3) carattere : colore preferito

modalità : {azzurro, rosso, blu ....} qualitativa

Statistica su popolaz. di n individui con modalità $v_1 < v_2 < \ldots < v_k$ del carattere;
se il carattere v_j è posseduto da n_j individui chiamo n_j frequenza assoluta
e $f_j = \frac{n_j}{n}$ frequenza relativa.

ES: noi, numero scarpe; $n = 50$

$v_j = 37$ $\quad n_j = 6$ freq. assoluta

$f_j = \frac{6}{50}$ freq. relativa.

- <u>moda</u>: la modalità con freq. più alta
(può non essere unico)

- <u>mediana</u>: la modalità t.c. il totale delle frequenze delle modalità inferiori è $< n/2$ e stesso per quelle superiori.

- <u>media</u>: $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j \cdot v_j = \sum_{j=1}^{k} f_j \cdot v_j$.

<u>Esempio</u>: popolazione $\{n : 1 \leq n \leq 15\}$

carattere = numero di divisori

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4

Modalità	Freq. ass	Freq. rel
1	1	1/15
2	6	6/15
3	2	...
4	5	...
6	1	...

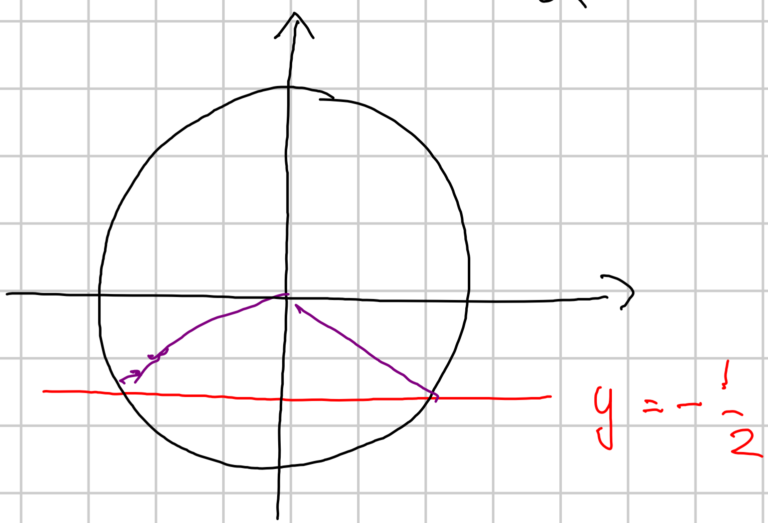
<u>Moda</u>: 2 <u>Mediana</u>: 3

<u>Media</u>: $\frac{1}{15} \cdot 1 + \frac{6}{15} \cdot 2 + \frac{2}{15} \cdot 3 + \frac{5}{15} \cdot 4 + \frac{1}{15} \cdot 6 = \dots$

Es. Trigonometria $\qquad s = \sin(x) \qquad c = \cos(x)$

$\boxed{1}$ $\quad \cancel{2sc} + 2s + c^2 \cancel{- 2sc} + s^2 = 0$

$\sin(x) = -\frac{1}{2}$



$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\left\{ -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$-\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$$\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{\pi}{6}+(2k+1)\pi$$

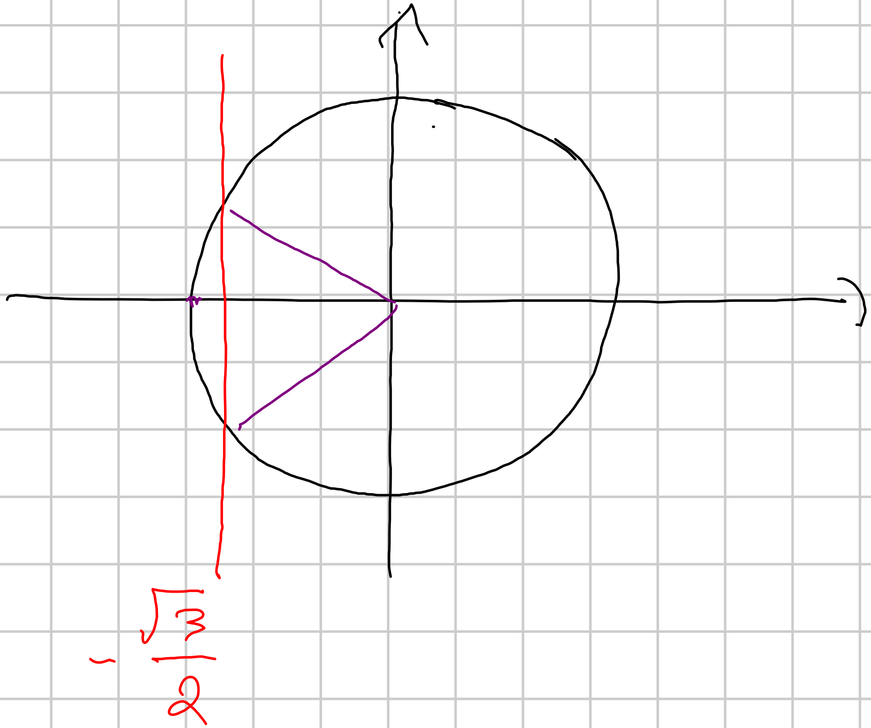
$$\left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi\right.$$

$$k\in\mathbb{Z}$$

$\boxed{2}$

$$\frac{\sqrt{3}}{4\cancel{s}}+\frac{c^{\cancel{2}}}{2\cancel{s}\cancel{c}}=0 \qquad s\neq 0,\ c\neq 0$$

$$\cos(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

$$\frac{7}{6}\pi + 2k\pi$$

$$\pm\frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi$$

$\boxed{3}$ $$\left(\sin(2x)+\cos(2x)\right)^2=\sin(4x)+\cos(4x)$$

$$\sin^2(2x)+\cancel{2\sin(2x)\cos(2x)}+\cos^2(2x)=\cancel{\sin(4x)}+\cos(4x)$$

$$\cos(4x)=1$$

$$4x=2k\pi$$

$$x=k\cdot\frac{\pi}{2} \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$\boxed{4}$ $\cos(\sqrt{x}+\sqrt{\pi})\cdot\cos(\sqrt{x}-\sqrt{\pi})-\cos^2(\sqrt{\pi})+1=0$

$(\cos\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{\pi}-\sin\sqrt{x}\cdot\sin\sqrt{\pi})(\cos\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{\pi}+\sin\sqrt{x}\cdot\sin\sqrt{\pi})$
$-\cos^2\sqrt{\pi}+1=0$

$\cos^2\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{\pi}-\sin^2\sqrt{x}\cdot\sin^2\sqrt{\pi}-\cos^2\sqrt{\pi}+1=0$

$\cos^2\sqrt{\pi}\,(\cos^2\sqrt{x}-1)-\sin^2\sqrt{x}\cdot\sin^2\sqrt{\pi}+1=0$

$\cos^2\sqrt{\pi}\,(-\sin^2\sqrt{x})-\sin^2\sqrt{x}\cdot\sin^2\sqrt{\pi}+1=0$

$$-\sin^2\sqrt{x}\,\underbrace{\left(\cos^2\sqrt{\pi}+\sin^2\sqrt{\pi}\right)}_{1}+1=0$$

$$\sin^2\sqrt{x}=1$$

$$\sin\sqrt{x}=\pm 1$$

$$\sqrt{x}=\frac{\pi}{2}+k\pi \qquad k\in\mathbb{N}$$

$$x=\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2 \qquad k\in\mathbb{N}$$

$\boxed{6}$ $4s^2 + 2\sqrt{2}c - 3 = 2c^2$

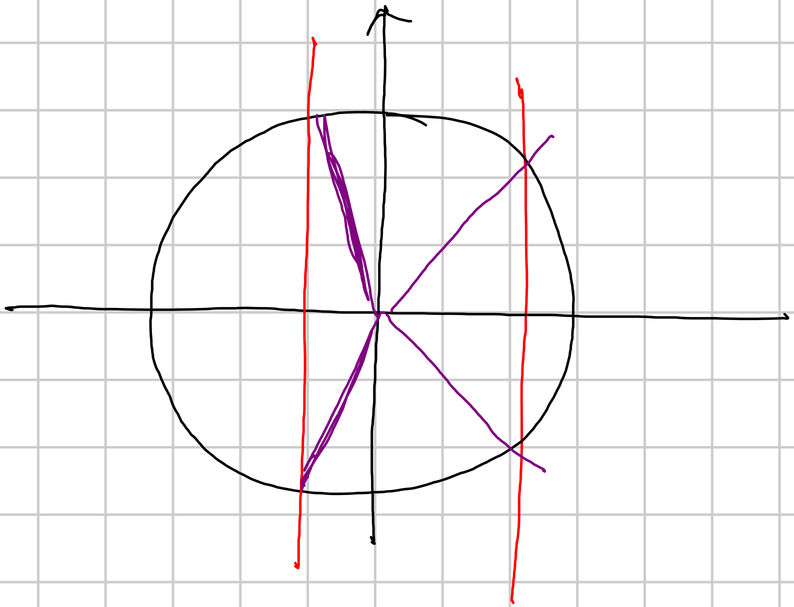
$4(1-c^2) + 2\sqrt{2}c - 3 = 2c^2$

$6c^2 - 2\sqrt{2}c - 1 = 0$

$t = \cos(x)$

$6t^2 - 2\sqrt{2}t - 1 = 0$

$t_{1,2} = \dfrac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2+6}}{6} = \dfrac{\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}}{6}$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $-\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$



$$\pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\pm \arccos\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right) + 2k\pi$$

$\boxed{7}$

$$\frac{\sin(x)+3}{\cos^2(x)+2} = 1$$

$$3+\sin(x) = 3-\sin^2(x)$$

$$\sin(x)\cdot(\sin(x)+1) = 0$$

$$x = k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$\boxed{8}$ $\cos(2x)+\sin(x)=0$

$$1-2\sin^2(x)+\sin(x)=0$$

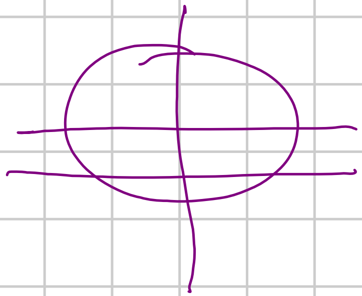
$$2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$$

$t = \sin(x)$

$2t^2 - t - 1 = 0$ $\quad (t-1)(2t+1) = 0$

$t = 1$ $\quad \sin(x) = 1$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$t = -\frac{1}{2}$ $\quad \sin(x) = -\frac{1}{2}$



$-\pi/6 + 2k\pi$

$-5\pi/6 + 2k\pi$.