

Matematica e statistica 3/12/18

Recupero : 13/12 on 12

— 0 —

Limiti

$I \subset \mathbb{R}$

intervallo / aperto / $\mathbb{R}$

$x_0 \in I$

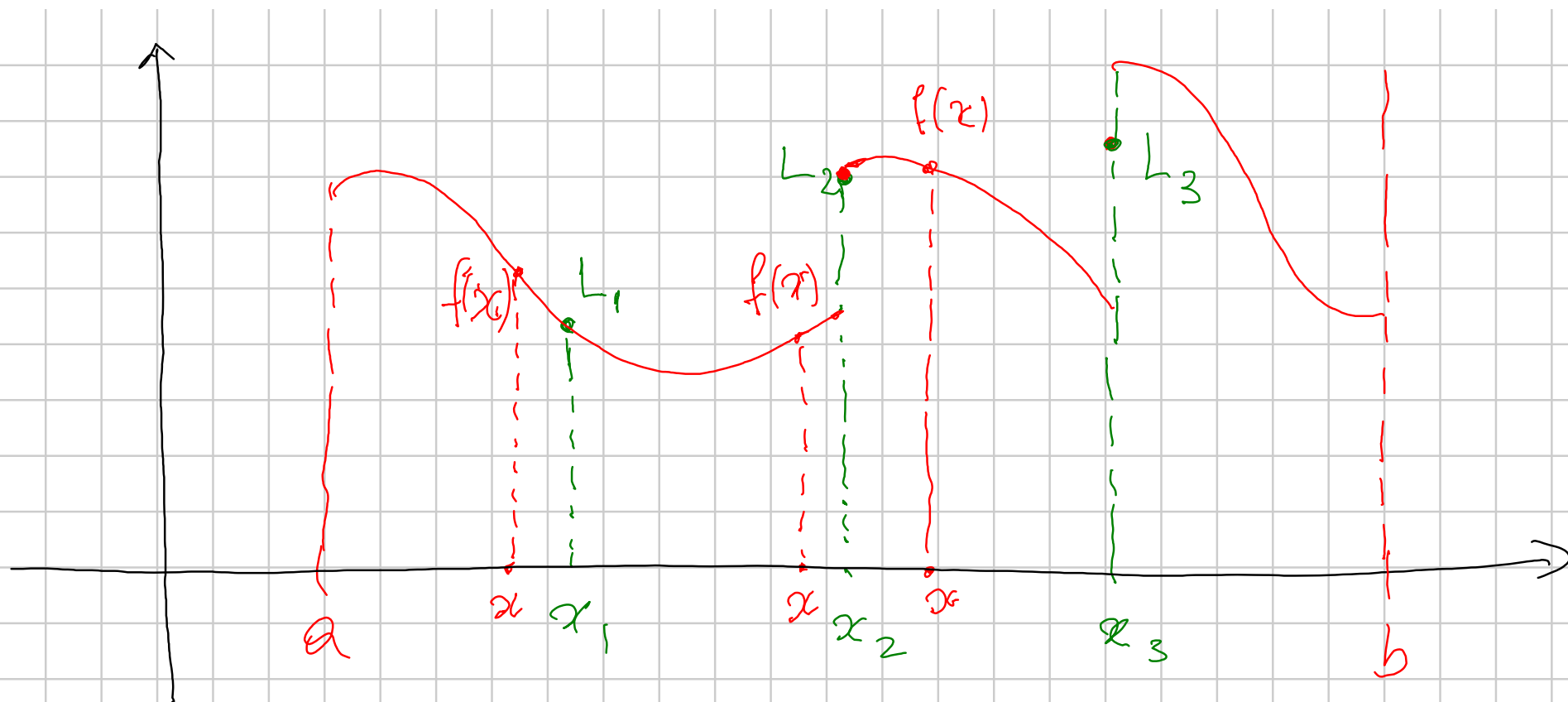
$f: I \rightarrow \mathbb{R}$

eventualmente escluso x_0

Se $L \in \mathbb{R}$ diciamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se "maiuscolo" man usco che x è avvicina a x_0
ho che $f(x)$ è avvicina a L "



$$\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = L_1 \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow x_2} f(x) = L_2 \quad \text{no}$$

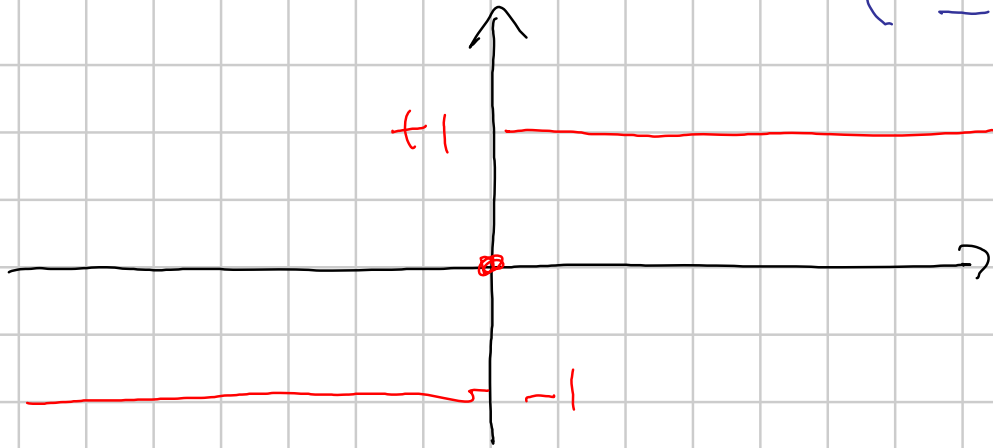
$$\lim_{x \rightarrow x_3} f(x) = L_3 \quad \text{no}$$

Fatto: di solito se f è definita in x_0
il limite esiste e vale $f(x_0)$.

Es: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x - 5}{x + 3} = \frac{9}{10}$$

Es : $\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$



se $x > 0$
se $x = 0$
se $x < 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn}(x) = \text{sgn}(0)$
no

(il lim. non esiste)

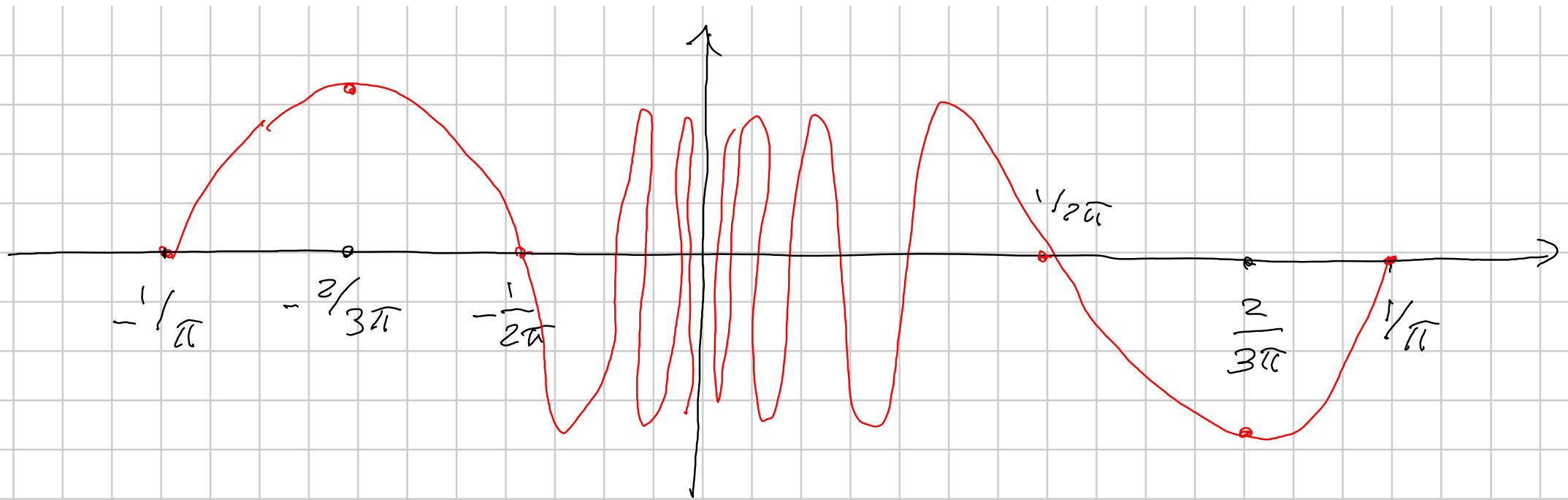
Def : dico che $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ se per x

Vicino a x_0 a destra ho che $f(x)$ è vicino a L

Dico che $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$. . . sinistra . . .

Es: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn}(x) = +1$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$

Es: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

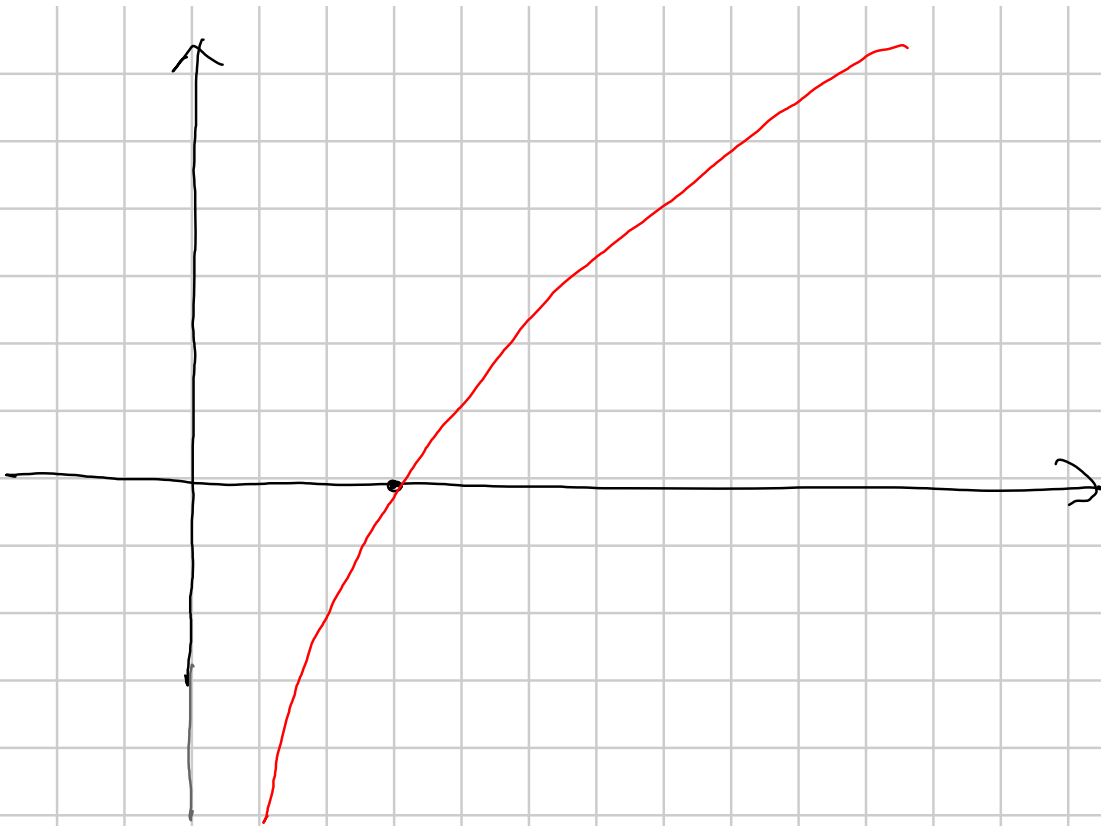


$\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

von unten -

Def: dico che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se
per x molto vicino a x_0 ho che $f(x)$ è
molto grande positivo; analogo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$
se $f(x)$ è molto negativo.

Es: $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$



Es: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-1}{x^3-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-1}{(x-1)^2(x+2)} = +\infty$

Es: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{7x-19}{x-2} = +\infty$

Def: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ se per x positivo
molto grande ho $f(x)$ vicino a L .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \text{para } x \text{ negativo} \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Ex:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 4x + 7}{6x^3 + x^2 - 11} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 5x + 12}{3x^3 - x^2 + 7} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x^3 + 1}{7x^5 - 2x + 5} = 0$$

Fatto: si ha "sempre" che

lim di somme = somme dei lim

lim di diff = diff dei lim

lim prod = prod dei lim

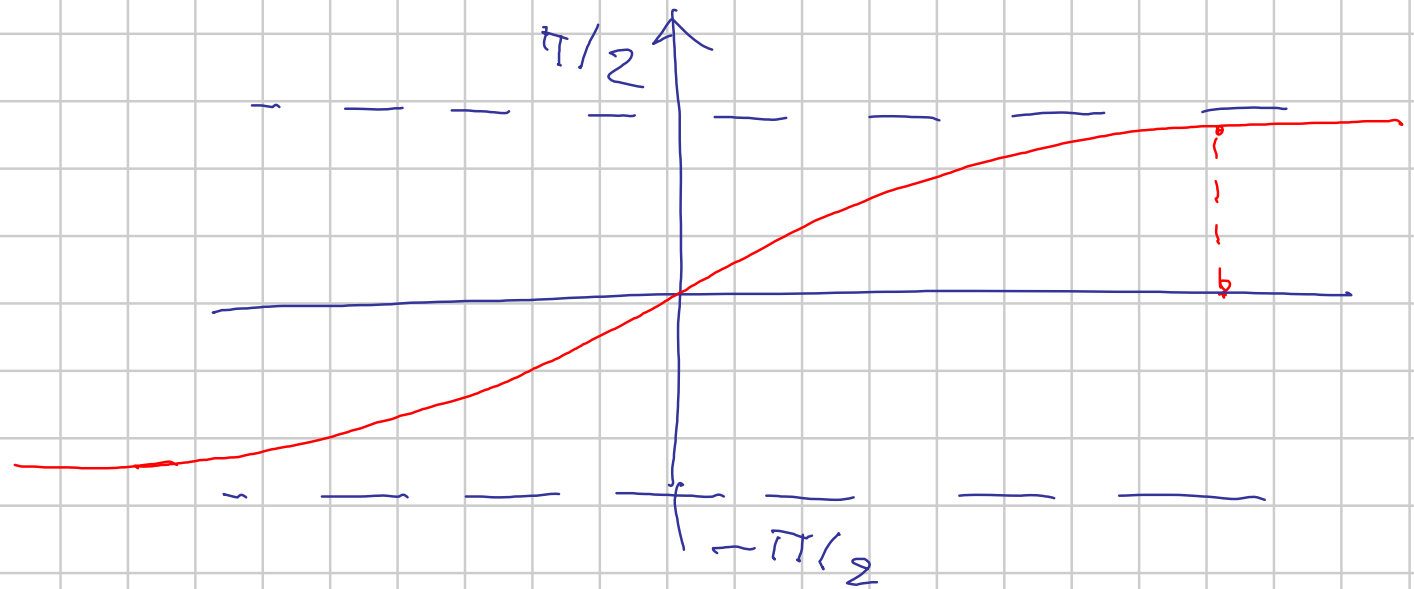
lim quot = quot dei lim

lim potenza = potenza dei lim

purché l'espressione a destra sia "non ambigua".

Es: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + 7(x-3) \right) = +\infty - 21 = +\infty$

Es: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{x^2+1} \cdot \arctan(x) = 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$



$$E_s: \lim_{x \rightarrow 7} (x-5)^{x-3} = 2^4 = 16$$

Casi ambigui:

$+\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^∞

"forme indéterminées"

Es: $p(x) = a_m x^m + \dots$

poli d. deg = m

$$q(x) = b_m x^m + \dots$$

poli d. deg = m

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_m x^m}{a_m x^m} =$$

$$= \begin{cases} \frac{a_m}{b_m} & \text{se } n = m \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{a_m}{b_m}\right) \cdot \infty & \text{se } n > m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}$$

Limiti notevoli:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

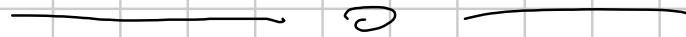
Fatti:
 exp vince sempre sulle potenze di x in $\pm\infty$
 log perde sempre sulle potenze in $0, +\infty$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^{10000}} = +\infty$$

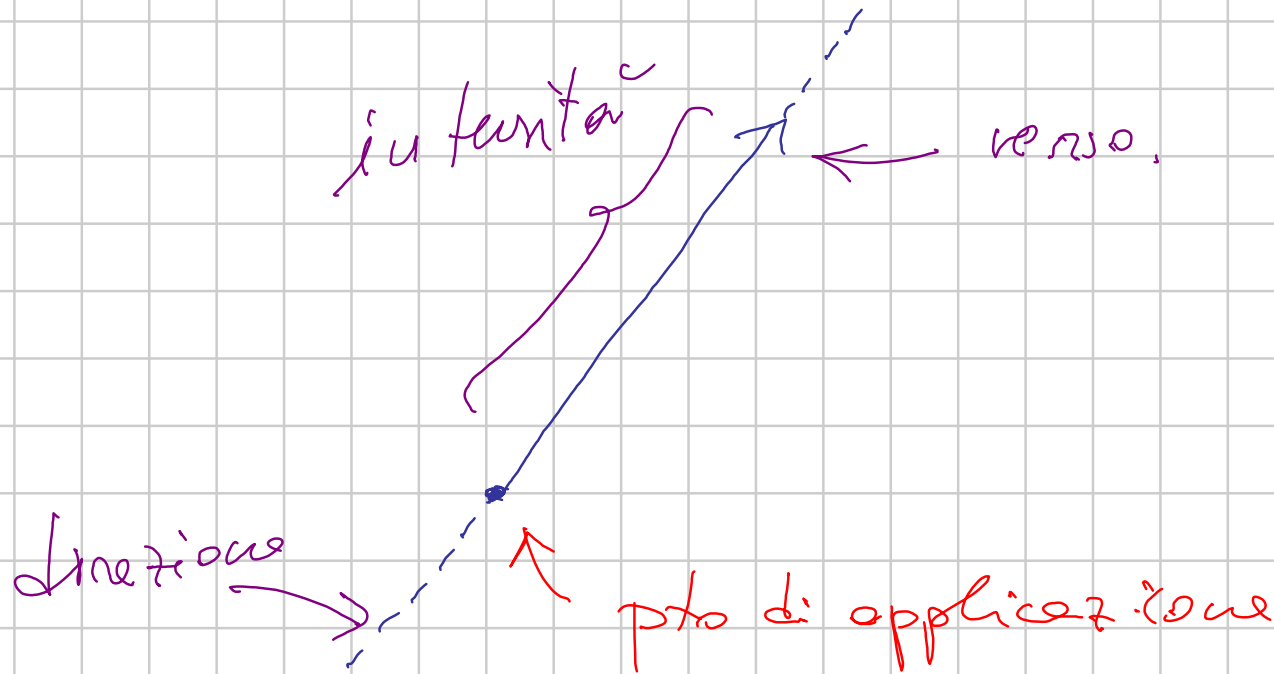
$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{10000} \cdot 3^x = 0$$

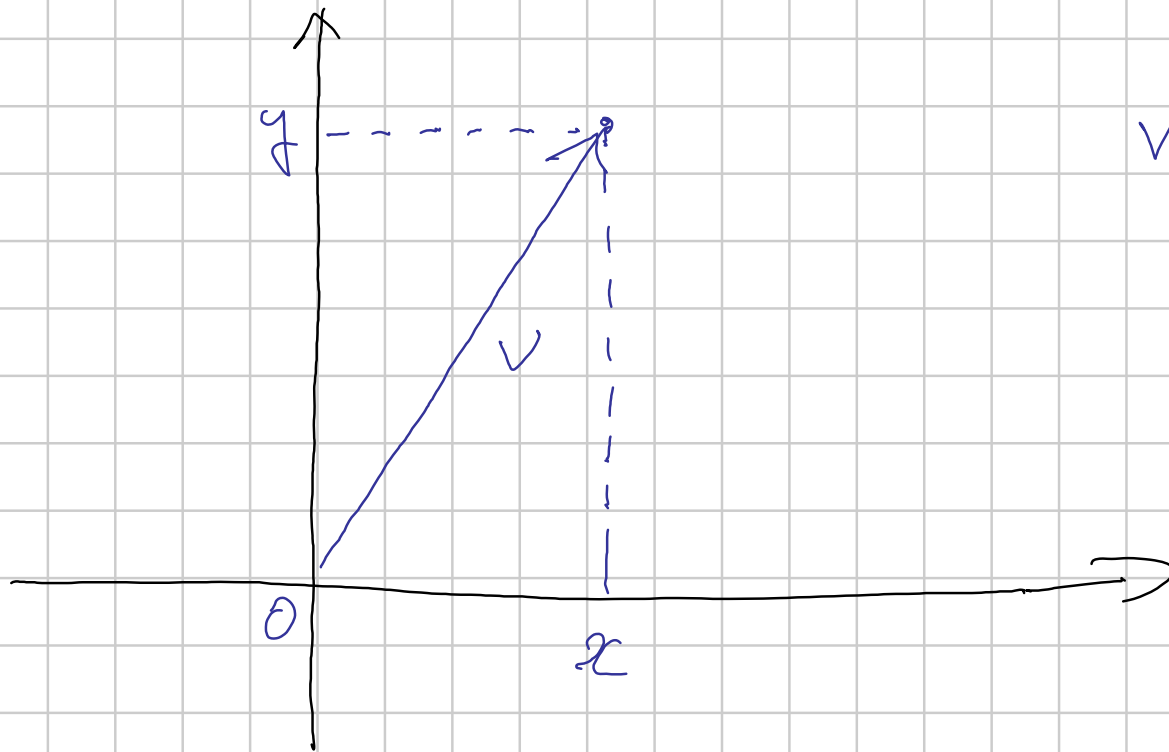
$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(x) = 0$$



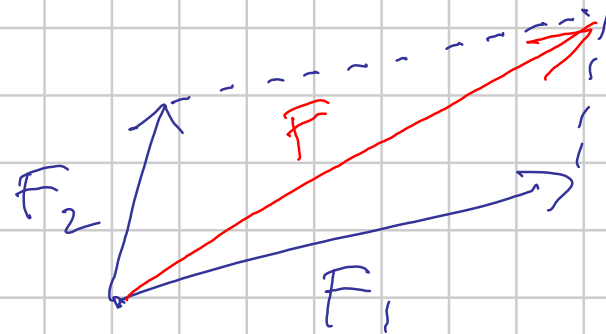
Vettori nel piano e nello spazio

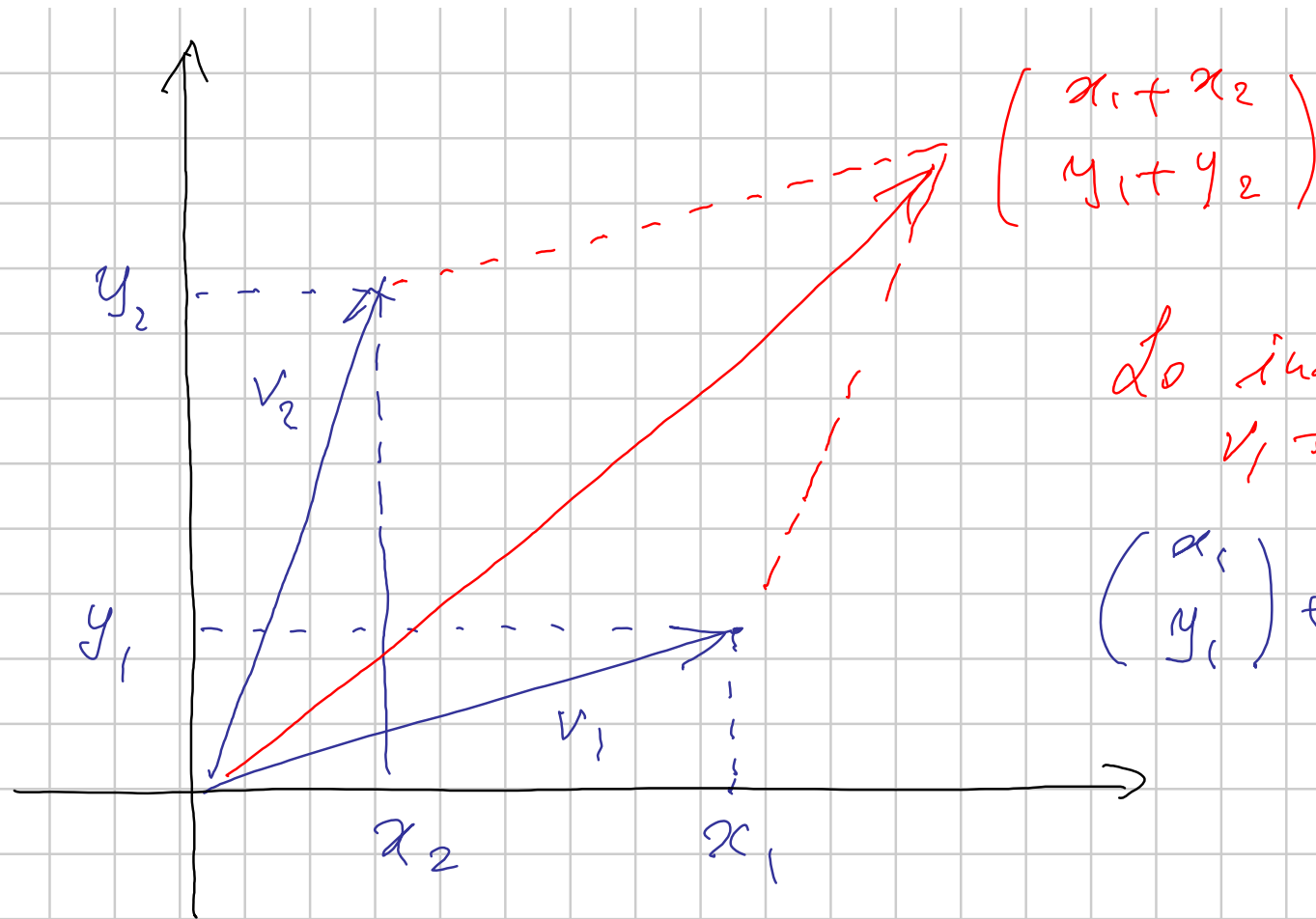




$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

nello spazio $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$





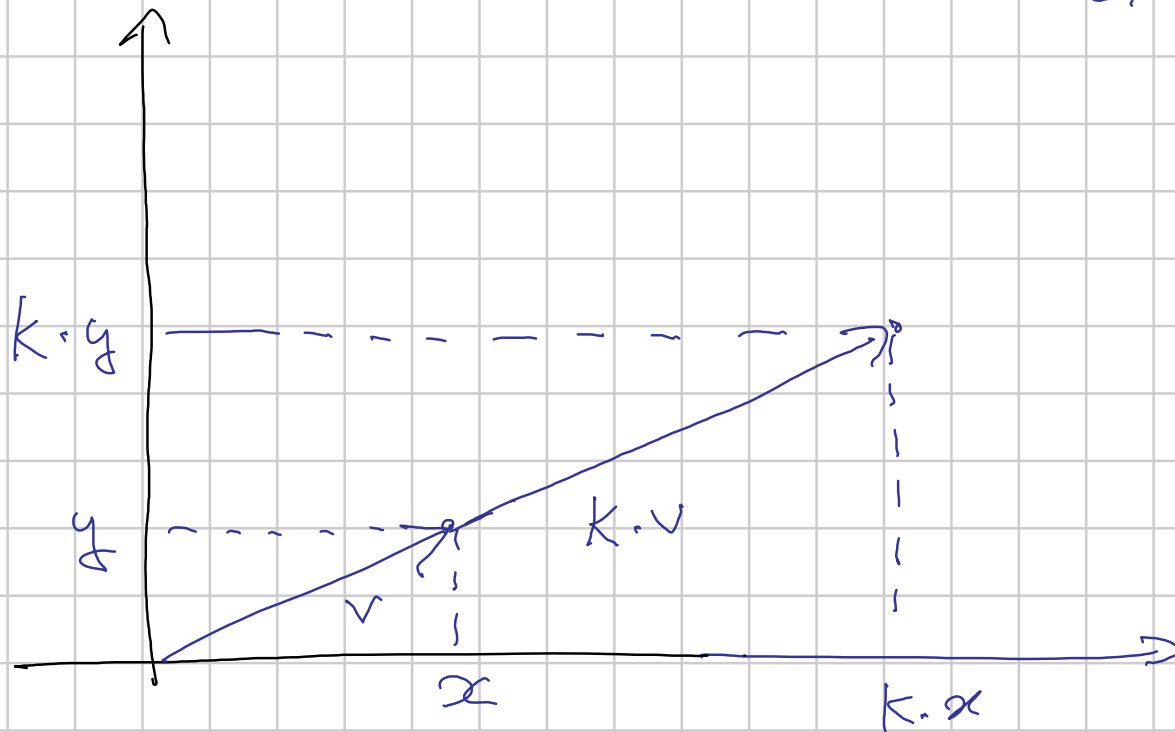
$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

lo indico con
 $v_1 + v_2$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

Nello spazio:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$



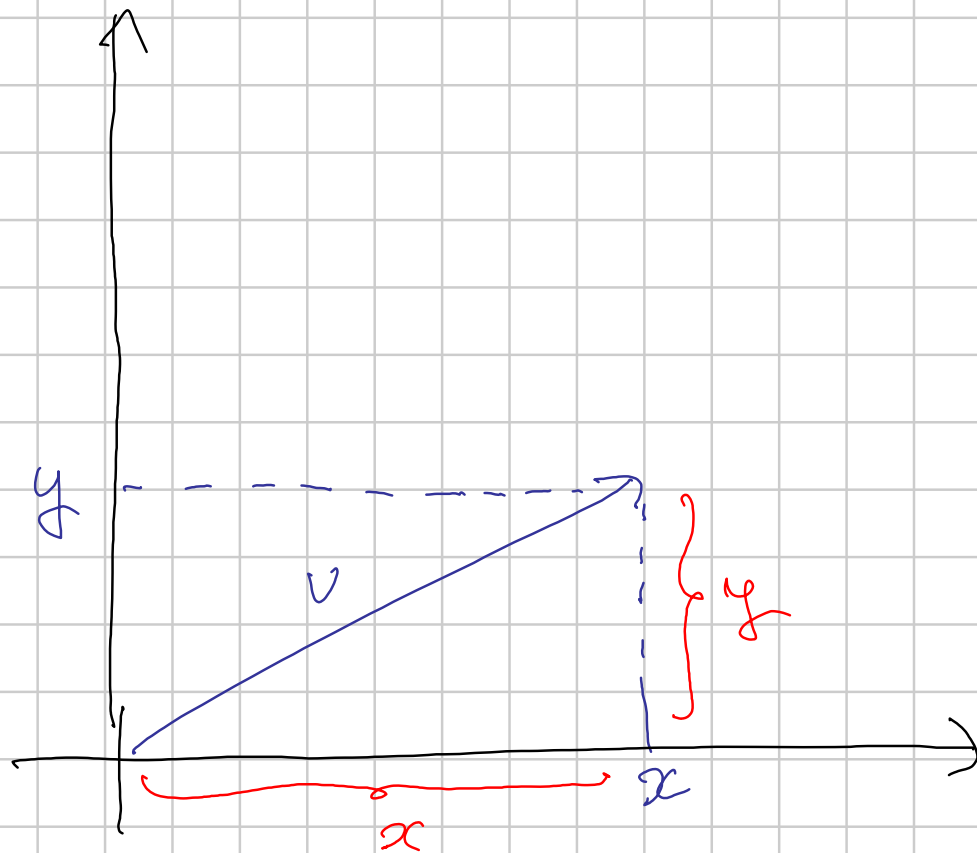
$k \cdot v$ = stesso direzione v ,
 stesso verso se $k > 0$
 verso opposto $k < 0$
 intensità $|k|$ quello di v

$$k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \end{pmatrix}$$

Nello spazio :

$$k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \\ k \cdot z \end{pmatrix}$$



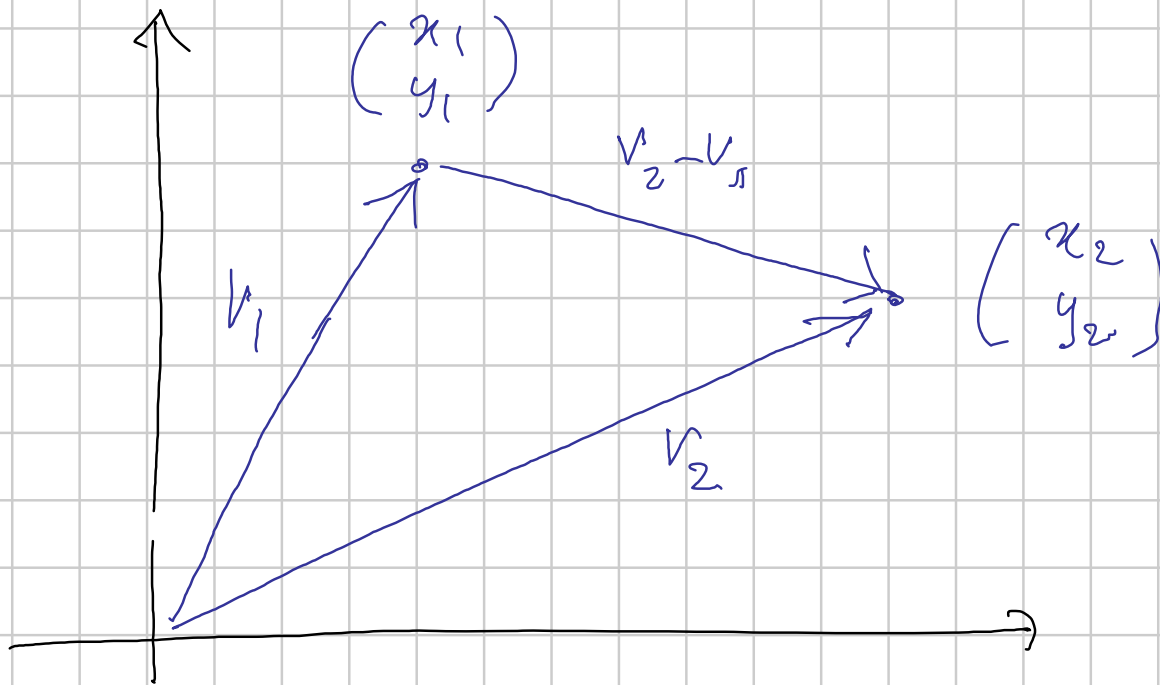


Def: chiameremo norma
di $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

= intensità delle
forze rappresentate
da v .

Nello spazio: $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.



$$\Rightarrow \text{dist}(v_1, v_2) = \|v_2 - v_1\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Nello spazio:

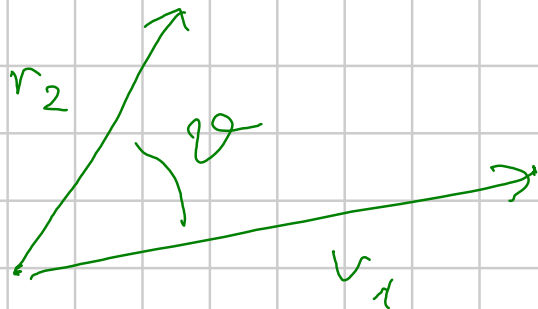
$$\text{dist}(v_1, v_2) = \|v_2 - v_1\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Def: chiamo prodotto scalare tra $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ il numero $\langle v_1 | v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

Nello spazio: $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Fatto (usando Teorema di Cauchy) : se $v_1, v_2 \neq 0$



$$\cos(\theta) = \frac{\langle v_1 | v_2 \rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$$

In particolare $v_1 \perp v_2 \iff \langle v_1 | v_2 \rangle = 0$.

$$\text{Es: } v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{\langle v_1 | v_2 \rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot (-1) + (-5) \cdot 4}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{7^2 + (-1)^2 + 4^2}} \\ &= -\frac{9}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{66}} \end{aligned}$$

Def: se $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ chiamo
prodotto vettoriale di v_1 e v_2

$$v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ -x_1 z_2 + x_2 z_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Fatti: • Se v_1, v_2 sono sulle stesse rette ho
 $v_1 \times v_2 = 0$

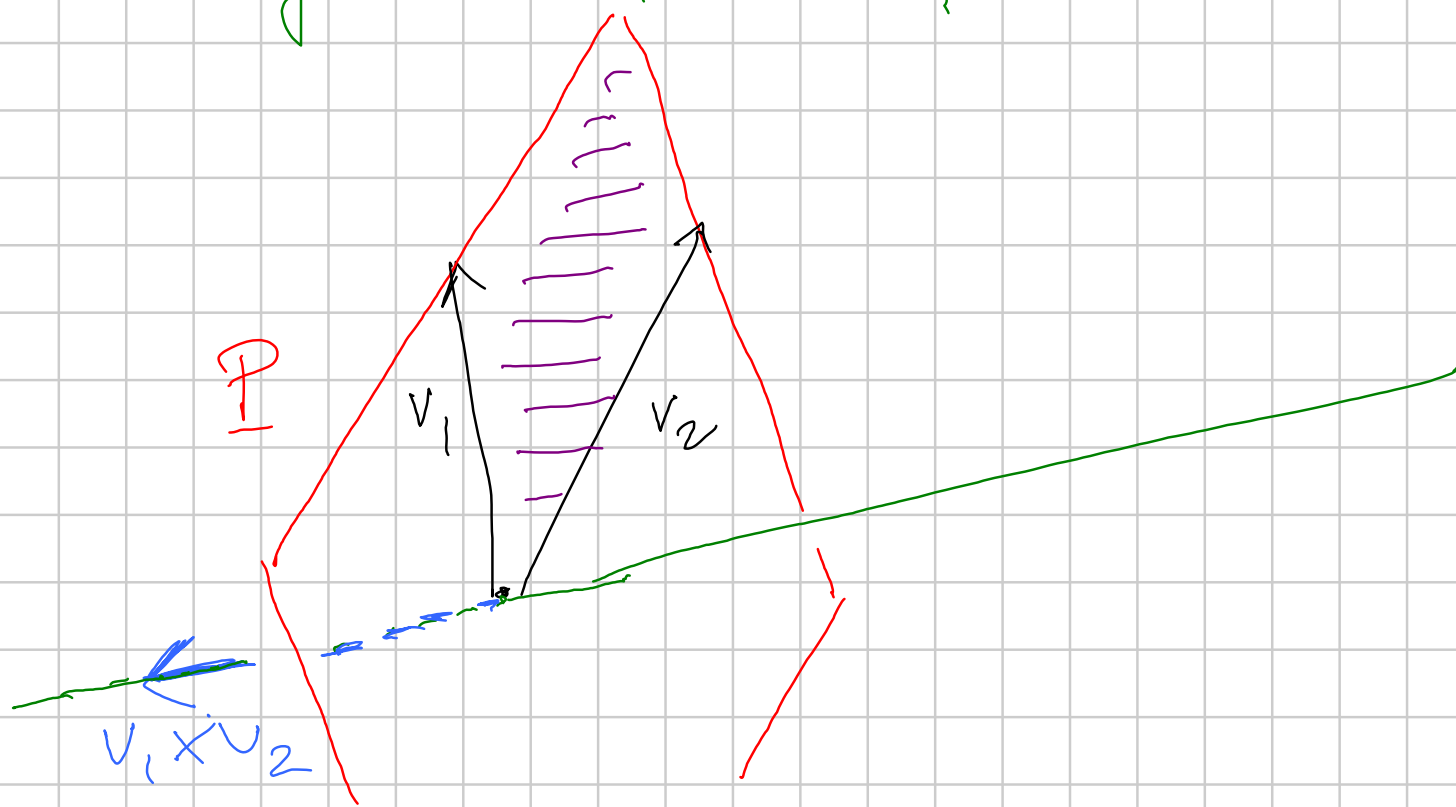
- se v_1, v_2 non sono sulla stessa retta c'è un piano P che li contiene e $v_1 \times v_2$ è il vettore così descritto:

→ direzione: retta ortogonale a P

→ intensità: area del parallelogramma
di lati v_1, v_2

→ verso: tale da si può disporre

lungo pollice, indice, medio delle ungue destre
 $v_1, v_2, v_1 \times v_2$.



Es:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 7 \cdot 6 - (-4) \cdot 2 \\ -3 \cdot 6 + (-4) \cdot (-5) \\ 3 \cdot 2 - 7 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 2 \\ 41 \end{pmatrix}$$

Verifico che è ortogonale ai vettori dati:

$$50 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 41 \cdot (-4) = 150 + 14 - 164 = 0 \quad \checkmark$$

$$50 \cdot (-5) + 2 \cdot 2 + 41 \cdot 6 = -250 + 4 + 246 = 0 \quad \checkmark$$